

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
МАТЕРИАЛЫ

III Всероссийской научной конференции

Самара, Россия
20–21 ноября 2025 г.

MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELLING
PROCEEDINGS

of the 3th All-Russian Scientific Conference

Samara, Russia
November 20–21, 2025

САМАРА
ООО «Самарама»
2026

УДК 517+510
ББК 22.1+22.2
М34

М34 **«Математика и математическое моделирование». Материалы III Всероссийской научной конференции. Самара, Россия, 20–21 ноября 2025 г.** — Самара: Самарама, 2026. — 234 с.

ISBN 978–5–6055840–2–5

Сборник содержит тезисы докладов участников Всероссийской научной конференции «Математика и математическое моделирование», проводившейся в Самаре с 20 по 21 ноября 2025 года на механико-математическом факультете Самарского национального исследовательского университета им. ак. С.П. Королева при поддержке Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа.

Сборник содержит научную информацию и адресован научным работникам, преподавателям, студентам и аспирантам математических специальностей.

Издание осуществлено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение №075–02–2025–179.

ISBN 978-5-6055840-2-5



9 785605 584025 >

© Самарский университет, 2026

Предисловие

Всероссийская научная конференция «Математика и математическое моделирование» проходила в Самаре с 20 по 21 ноября 2025 года. Её организаторами выступили Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева и Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа.

Организационный комитет конференции: А. А. Грисяк (Самарский университет, сопредседатель), Д. В. Иванов (Самарский университет, сопредседатель), С.В. Асташкин (Самарский университет, сопредседатель), М. Е. Федина (Самарский университет), С.Я. Новиков (Самарский университет), В.В. Севостьянова (Самарский университет), М.Н. Осипов (Самарский университет), А.Н. Панов (Самарский университет), В.В. Любимов (Самарский университет), Е.А. Щепакина (Самарский университет), А.Н. Степанов (Самарский университет), Л.В. Степанова (Самарский университет), И. Л. Сандлер (Самарский университет).

Научная программа конференции включала следующие направления: фундаментальная математика и приложения, математическое моделирование, проблемы математического образования.

Сборник содержит тезисы докладов участников конференции.

Оргкомитет

STUDY OF FREE LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF A VARIABLE-LENGTH ROD

V.L. Litvinov, K.V. Litvinova

vladlitvinov@rambler.ru, kristinalitvinova900@rambler.ru

УДК 534.11

This paper presents the application of the Kantorovich—Galerkin approximate method to the analysis of free longitudinal oscillations of a rod whose length varies with time. A model with rigidly fixed and free ends is considered. The mathematical formulation of the problem includes a partial differential equation for the displacement function, homogeneous boundary conditions, and inhomogeneous initial conditions. An analytical expression for the oscillation amplitude is obtained.

Ключевые слова: wave equation, longitudinal oscillations, variable-length rod, moving boundaries, Kantorovich—Galerkin method.

One-dimensional mechanical systems with moving boundaries are widely used in engineering, for example, in lifting mechanisms [1, 3, 7, 8], flexible transmissions [1, 2, 4, 5], drill strings, and solid fuel rods [6]. Describing the dynamics of such systems is fraught with significant mathematical difficulties. Among the analytical approaches, the most effective are the method of introducing new variables that fix the boundaries [5], the method of superposition of counterpropagating waves [6], and the method of reducing the wave equation to the Laplace equation [7]. However, the scope of application of exact methods is limited to simple boundary conditions, which explains the popularity of approximate approaches [1–4, 6, 10, 11]. In this article, the problem of free longitudinal vibrations of a variable-length rod is solved using the Kantorovich—Galerkin method [10]. The approach developed in [3, 6] is used. We consider the longitudinal vibrations of an elastic rod whose length varies due to the movement of its free end. The dynamics of the system are described by the wave equation [9, 12] with homogeneous boundary conditions and inhomogeneous initial conditions. Application of the Kantorovich—Galerkin method allowed us to obtain an analytical solution for the amplitude of free vibrations of a rod with a moving boundary. The simplicity of the final expression makes the obtained results convenient for analyzing the dynamics of technical objects whose structural length changes during operation.

Литература

1. *Savin G.N., Goroshko O.A.* Dynamics of a Thread of Variable Length. — Kyiv: Nauk. dumka, 1962. — 332 p.
2. *Samarin Yu.P.*, On a Nonlinear Problem for the Wave Equation in One-Dimensional Space // Applied Mathematics and Mechanics, **26**:3 (1964), 77–80.
3. *Goroshko O.A., Savin G.N.*, Introduction to Mechanics of Deformable One-Dimensional Bodies of Variable Length. — Kyiv: Nauk. dumka, 1971. — 270 p.

Litvinov Vladislav Lvovich (PhD, Associate Professor, Head of the Department of General Theoretical Disciplines (GTD), the Samara State Technical University branch in Syzran, Syzran, Russia)

Litvinova Kristina Vladislavovna (Master's student, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

4. *Vesnitskii A.I.*, Waves in systems with moving boundaries and loads. — Moscow: Fizmatlit, 2001. — 320 p.
5. *Barsukov K.A., Grigoryan G.A.*, On the theory of a waveguide with moving boundaries // *Izvestiya vuzov. Radiofizika*, **2** (1976), 280–285.
6. *Lezhneva A.A.*, Flexural vibrations of a beam of variable length // *Izvestiya AN SSSR. Mechanics of Solids*, **1** (1970), 159–161.
7. *Kolosov L. V., Zhigula T.*, I. Longitudinal and transverse vibrations of a hoisting unit rope string // *Izvestiya Vuzov. Mining Journal*, **3** (1981), 83–86.
8. *Zhu W. D., Chen Y.*, Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // *J. Vibr. Acoust.*, **1** (2006), 66–78.
9. *Litvinov V.L., Litvinova K.V.*, On an inverse method for solving problems of oscillations of mechanical systems with moving boundaries // *Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics*, **3** (2024), 53–59.
10. *Litvinov V.L., Litvinova K.V.*, Application of the Kantorovich-Galerkin method for analyzing the resonance characteristics of damped systems // *Journal of Theoretical and Mathematical Physics*, **224**:1 (2025), 129–138.
11. *Litvinov V.L., Shamolin M.V.*, On One Asymptotic Method for Solving Homogeneous Integro-Differential Equations Describing Oscillations of Objects with Moving Boundaries // *Siberian Journal of Industrial Mathematics*, **28**:2 (2025), 39–54.
12. *Litvinov, V.L.*, On one solution of the vibration problem of mechanical systems with moving boundaries [Text] / V.L. Litvinov, K.V. Litvinova // *Bulletin of Samara University. Natural Science Series*, **30**:1 (2024), 40–49.

SCHÜTZENBERGER HIERARCHY OF REGULAR LANGUAGES AND ALGORITHMS FOR TESTING LOW LEVELS OF HIERARCHY

M. Novikov, N. Krainiukov

1220220008@smbu.edu.cn, n.krainiukov@smbu.edu.cn

УДК

We discuss deterministic finite automata and their syntactic monoids. We provide examples of finitely generated monoids with two generators that exhibit polynomial growth in the number of elements. This fact enables computational analysis of the structure of these monoids at low levels of the Schützenberger hierarchy.

Introduction

The syntactic monoid $\mathcal{M}(L)$ [1] of a regular language $L \subseteq \Sigma^*$ is profound in the study of DFAs, because it is the smallest monoid that recognizes L (induced by syntactic congruence $\sim_L$). The size $|\mathcal{M}(L)|$ serves as a measure of descriptive complexity, particularly when linked to the state complexity of minimal DFAs accepting L .

Monoid sizes are computed using a GAP implementation.

Definitions

A *deterministic finite automaton* (DFA) is a 5-tuple $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, where Q is a finite state set ($|Q| = n$), Σ is the input alphabet, $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ is the transition function, $q_0 \in Q$ is the initial state, and $F \subseteq Q$ is the accepting set. The language accepted by A is $\mathcal{L}(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) \in F\}$.

The *syntactic congruence* $\sim_L$ on Σ^* is defined by $u \sim_L v$ iff for all $x, y \in \Sigma^*$, $uxy \in L \iff vxy \in L$. The *syntactic monoid* is $\mathcal{M}(L) = \Sigma^* / \sim_L$, with size $|\mathcal{M}(L)| \leq n^n$ for an n -state minimal DFA.

The transition monoid of a DFA is the submonoid of T_n (full transformation monoid on n elements) generated by the transformations $\delta(\cdot, a)$ for $a \in \Sigma$. For minimal DFAs, this coincides with $\mathcal{M}(L)$.

Elements of T_n are functions $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, composed as $f \circ g(i) = f(g(i))$.

Syntactic Monoid Bounds

Let A be an n -state DFA with $Q = \{1, 2, \dots, n\}$. Let σ be a cyclic permutation of length n (acting as the cycle $(1\ 2\ 3\ \dots\ n)$), and τ be a projection (that is, an idempotent transformation, that throws some elements into the sink element s) with image size $k < n$. Consider the syntactic monoid $M = \langle \sigma, \tau \rangle$ for automaton A .

Consider elements of form:

$$w = \sigma^{i_1} \cdot \tau \cdot \sigma^{i_2} \cdot \tau \cdot \dots \cdot \sigma^{i_m} \in M,$$

where $i_m \in \mathbb{N}$ for each m : $0 \leq m < n$.

Mikhail Novikov (Shenzhen MSU-BIT University, Shenzhen, China)
Nikolai Krainiukov (Shenzhen MSU-BIT University, Shenzhen, China)

It is easy to see that, since $\tau(x)$ is idempotent, each element of the monoid may be represented as some w . To simplify w -representation, we introduce $\tau_i = \sigma^{-i} \cdot \tau \cdot \sigma^i$, which essentially moves the image and sink element of τ left by i elements and is uniquely defined by those characteristics:

$$\begin{aligned}\text{Im}(\tau_i) &= \{x + i \pmod{n} \mid x \in \text{Im}(\tau)\} \\ s_i &= s + i \pmod{n}\end{aligned}$$

Obviously, $|\text{Im}(\tau_i)|$ is also k for any i . Each application of τ_i reduces the diversity of states in A .

Lemma 1. For a transformation τ_i with $|\text{Im}(\tau)| = k$, after t applications of τ in a product, the image size of the entire transformation is at most k .

Lemma 2. Any w can be represented as $\sigma^p \cdot \tau_{i_1} \cdot \tau_{i_2} \dots \tau_{i_{m-1}}$, where p is an integer between 1 and n , independent from each index i .

Theorem. Let $\sigma, \tau \in T_n$ be transformations, where σ is cyclic and τ is a projection with image size $k = |\text{Im}(\tau)| < n$. Then the size of a Transition Monoid M generated by σ and τ has an upper bound of $O(n^2)$:

$$|M| = |\langle \sigma, \tau \rangle| \leq O(n^2).$$

Proof. Consider the structure of each $w \in M$. By Lemma 2 $w(x) = \sigma^p \cdot \tau_{i_1} \cdot \tau_{i_2} \dots \tau_{i_{m-1}}(x) = \sigma^p \circ (\tau_{i_1} \cdot \tau_{i_2} \dots \tau_{i_{m-2}}) \circ \tau_{i_{m-1}}(x)$.

First, assume that w has at least one τ_i in its representation.

- σ is a simple cyclic permutation, hence there's exactly n of distinct σ^p .
- As $\tau_{i_1} \cdot \tau_{i_2} \dots \tau_{i_{m-2}} : \text{Im}(\tau_{i_{m-1}}) \rightarrow \text{Im}(\tau_{i_1})$, by Lemma 1 number of distinct compositions is at bound above by k^k .
- Recall that $\tau_{i_{m-1}}$ by definition is just $\sigma^{-i_{m-1}} \cdot \tau \cdot \sigma^{i_{m-1}}$, therefore the number of unique $\tau_{i_{m-1}}$ is at most n , but typically smaller.

Now, as we have already seen above, if no τ is present in w , i.e. $w = \sigma^p$, then there are exactly n of such w 's.

Combining these chunks together, we get that $|M| \leq n \cdot k^k \cdot n + n$. If we view k as a constant, it immediately follows that $|M| = O(n^2)$. ■

Determining Schützenberger hierarchy level

Let V be a variety of monoids (a class of monoids closed under taking submonoids, homomorphic images, and direct products) [2]. We define:

- V_0 : the variety of trivial monoids (consisting of a single element)
- V_{n+1} : the variety of monoids that are direct products of groups from V_n and aperiodic monoids, or the variety generated by such monoids

However, a more commonly used definition uses alternation of groups and aperiodic structures:

Level 0: Aperiodic monoids. These monoids contain no non-trivial groups. The corresponding languages are called *star-free* and can be described by first-order logic formulas. In general, the algorithmic complexity of checking aperiodicity of the syntactic monoid depends exponentially on the number of

states in the DFA, as every element of the monoid must be considered. In our case, this reduces to a *polynomially complex* computation.

Level 1/2: Monoids that are groups. Languages whose syntactic monoids are groups are called *group languages*. They can be recognized by finite automata that are groups. The same argument as before applies here: languages generated by the afford mentioned way may be checked within asymptotically polynomial time, in contrast with general monoids.

Level 1: These are monoids that are an extension of an aperiodic monoid by a group. More precisely, a monoid M is at *level 1* if it divides (in the sense of semigroup theory) an aperiodic monoid and a group. *Level 1* languages are exactly those that can be expressed using Boolean combinations of *level 1/2* languages and their derivatives.

Level 2 and above: Similarly, a monoid M is at level n if it divides a monoid of level $n - 1$ and a group, or a group and a monoid of level $n - 1$. The precise definition requires the use of the concept of the "*derived*" monoid and the sequential application of operations of taking group and aperiodic parts.

The algorithm

We now discuss the algorithm for distinguishing levels of the Schützenberger hierarchy for a regular language $L = \mathcal{L}(M)$. The hierarchical levels are determined as follows:

- If the monoid is aperiodic, i.e., there exists $n \in \mathbb{N}$ such that for every $m \in M$, $m^n = m^{n+1}$, then language L is at *level 0*.
- If the monoid is a group, then language L is at *level 1/2*.
- If the monoid can be split into a product of an aperiodic monoid and a group (or vice versa), then language L is at *level 1*.
- Otherwise, it is at *level 2* or above.

GAP Implementation

We used the GAP (*Groups, Algorithms, Programs*) to compare theoretical results with computer algebra calculation. There are many packages such as "automata", "semigroups" with give many usefully functions to manipulate DFAs, monoids, semigroups.

Additionally, we have written two helper functions for numeric investigation of the ideas provided in this paper. Complete code is available in this public repository: https://git.mwww.ru/muxal/paper_mmm2025_gap_impl.

Exploring the complexity of Schützenberger hierarchy may prove to be useful in many fields of mathematics, including machine proof of algorithm correctness and artificial intelligence tasks.

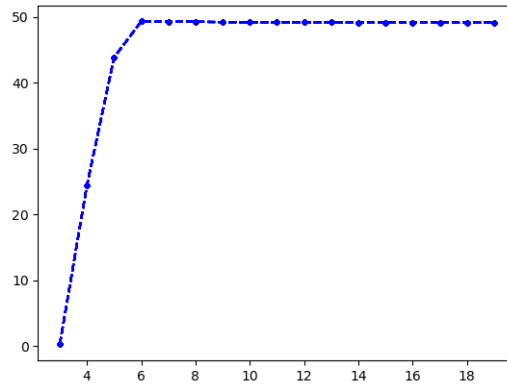


Figure 1: $\frac{|M|}{n^2}$ (y axis) asymptotic behavior depending on n (x axis).

Литература

1. *Holzer M., König B.*, On deterministic finite automata and syntactic monoid size. — Theoretical Computer Science 327, 2004. — 319–347.
2. *Straubing H.*, Finite semigroup varieties of the form V^*D . — Journal of Pure and Applied Algebra, 1981.

ON THE INTEGRAL CONDITION IN THE THEOREM ON THE COMPLETE DIFFERENTIAL

K.V. Seroshtanova, V.V. Volchkov

timofeeva_karina00@mail.ru, valeriyvolchkov@gmail.com

УДК 517.988.28

In the work, a condition is obtained under which the expression $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ is a complete differential. This condition is related to the vanishing of curvilinear integrals along the boundaries of squares congruent to the given one.

Ключевые слова: complete differential, Pompeiu's property, a class of quasi-analytic functions.

Let two continuously differentiable functions $P(x, y)$ and $Q(x, y)$ be defined in some simply connected domain. When studying differential equations of the form

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

the question arises when the expression $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ is the complete differential of some function $U(x, y)$. It is closely related to the question of the conditions for the independence of a curvilinear integral from the choice of the integration path. The answers to these questions can be summarized in the form of the following theorem, which is considered in the course of mathematical analysis [1].

Теорема 1. *Let the functions P and Q be continuously differentiable in a simply connected domain $D \subset \mathbb{R}^2$. Then the following conditions are equivalent:*

- 1) $\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$ for any closed piecewise smooth curve $\gamma \subset D$;
- 2) for any points $A, B \in D$, the integral $\int_{\gamma_{AB}} Pdx + Qdy$ is independent of the piecewise smooth curve $\gamma_{AB} \subset D$ connecting the points A and B ;
- 3) the expression $Pdx + Qdy$ is the complete differential of some differentiable function U in the domain D ;
- 4) in the domain D , the condition $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ is fulfilled.

In the proof of Theorem 1, a wide arbitrariness is used in the choice of contours of γ . However, in some cases, this requirement for γ can be significantly weakened.

In this paper, we will consider the case when functions belong to the class of quasi-analytic functions and integration is carried out not along all contours, but along the boundaries of a square of a fixed size.

Let G be an open set in the complex plane $\mathbb{C}$. For a sequence $\mu = \{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ of positive integers, we denote by $C^{\mu}(G)$ the set of functions $f \in C^{\infty}(G)$ such that for any compact $E \subset G$ there exists a constant $c_E > 0$, depending on E and f , such that

$$\max_{z \in E} |(\partial^{\alpha} f)(z)| \leq c_E^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|}$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (тема № FREM-2026-0004 и тема № FRRE-2026-0015).

Seroshtanova Karina Vitalievna (Postgraduate Student, Donetsk State University, Donetsk, Russia)

Volchkov Valeriy Vladimirovich (Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Russia)

for all partial differentiation operators ∂^α of the order $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, where $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \geq 0$.

Теорема 2. *Let the functions $P, Q \in C^\mu(G)$, where $G \in \mathbb{R}^2$ be a simply connected domain that is the union of open disks with radii greater than $\frac{d\sqrt{2}}{2}$, where $d > 0$ is fixed. Let the following condition also be fulfilled*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\inf_{q \geq j} M_q^{1/q}} = +\infty. \quad (1)$$

Then the following conditions are equivalent:

- 1) $\int_{\partial K} Pdx + Qdy = 0$ for any closed square $K \subset G$ with the side of length d ;
- 2) the expression $Pdx + Qdy$ is the complete differential of some differentiable function U in the domain D .

According to the well-known Danjoi-Carleman theorem, condition (1) means that f belongs to a quasi-analytic class of functions. Note also that the statement of Theorem 2 will become incorrect if condition (1) is not fulfilled. The condition for the set G in Theorem 2, related to the value $\frac{d\sqrt{2}}{2}$, also cannot be removed (otherwise, the set G may not contain any closed square with the side of length d).

For other refinements of the complete differential theorem and questions related to integral holomorphicity conditions, see [2]–[4]. These results may be useful in further research related to Pompeiu-type problems on bounded domains.

Литература

1. Волчков В.В., Волчков Вит. В., О некоторых свойствах функций, характеризующих нулевыми интегралами // Алгебра и анализ, Матем. обр., 42 (2021), 38–48.
2. Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations // Dordrecht: Kluwer, 2003. — 454 p.
3. Volchkov V.V., Volchkov Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. — Birkhauser, 2013. — 592 p.
4. Volchkov V.V., Volchkov Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. — Springer: Verlag London, 2009. — 671 p.

О НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОБЛЕМЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ИЗ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

К.Н. Альдебенева, Д.В. Чаплий
aldebeneva.kn.lv@ssau.ru, chaplij.dv@ssau.ru

УДК 539.3, 539.6

Работа посвящена молекулярно-динамическому моделированию нагружения ультратонкой алюминиевой пластины на кремниевом основании. Рассмотрение задач о деформировании тонкой пластины на кремниевом основании обусловлено необходимостью иметь полное представление о ее механическом поведении на наномасштабном уровне, что чрезвычайно важно для развития нано- и микроразмерных механических систем. В работе построен целый ряд молекулярно-динамических моделей алюминиевой пластины на кремниевом основании с использованием различных потенциалов межатомного взаимодействия, доступных для моделирования в пакете Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator (LAMMPS), таких как потенциал Терсофф и потенциал Стилленгера-Вебера для описания кремния, вкуче с потенциалом внедренного атома для моделирования алюминия, а также общего MEAM потенциала для моделирования свойств как алюминия, так и кремния.

Ключевые слова: решение задачи Хатчинсона-Райса-Розенгрена, нелинейная задача на собственные значения, спектр собственных значений, соответствующим им собственные функции

Целью Хатчинсона (1968), Райса и Розенгрена (1968) было найти асимптотическое поле напряжений и деформаций вблизи вершины трещины для нелинейно упругого (или степенного упрочняющегося пластического) материала. Данная задача продолжает привлекать внимание исследователей [1–4]. Решение HRR описывает асимптотическое поле напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины для материала, подчиняющегося степенному закону деформационного упрочнения:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n, \quad (1)$$

где σ_0 , ε_0 — характерные напряжение и деформация, n — показатель упрочнения, α — безразмерная постоянная.

Основные формулы HRR-полей

Поля имеют структуру с разделёнными переменными и характеризуются J -интегралом как параметром интенсивности:

Альдебенева Ксения Николаевна, аспирант Самарский университет (Самара, Россия);
Aldebeneva Ksenia Nikolaevna (Samara University, Samara, Russia)

Чаплий Дмитрий Викторович, аспирант Самарский университет (Самара, Россия);
Chalij Dmitrij (Samara University, Samara, Russia)

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_0 \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta; n), \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij}(r, \theta) = \alpha \varepsilon_0 \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta; n), \quad (3)$$

$$u_i(r, \theta) = \alpha \varepsilon_0 \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_i(\theta; n). \quad (4)$$

Здесь приняты обозначения r, θ — полярные координаты с началом в вершине трещины, J — J -интеграл (параметр интенсивности), I_n — безразмерная константа, зависящая от n и режима нагружения, $\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\varepsilon}_{ij}, \tilde{u}_i$ — безразмерные угловые функции.

Связь с задачей на собственные значения

Решение задачи отыскания напряжений, деформаций и перемещений ищется в виде произведения радиальной и угловой частей. Подстановка анзаца

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = r^s \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (5)$$

в нелинейные уравнения равновесия и совместности приводит к нелинейной задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Собственное значение (показатель сингулярности) определяется из условия существования нетривиального решения:

$$s = -\frac{1}{n+1}. \quad (6)$$

Собственные функции — угловые распределения $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta; n)$, находятся решением ОДУ при найденном s . Зависимость (6) показывает эволюцию сингулярности: при $n = 1$ (упругий материал): $s = -1/2$ — классическая сингулярность ЛУМР $\sigma \sim r^{-1/2}$; при $n \rightarrow \infty$ (идеальная пластичность): $s \rightarrow 0$ — сингулярность исчезает.

Физическая интерпретация

J -интеграл — амплитудный множитель поля (аналог K_I в ЛУМР). угловые функции $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta; n)$ универсальны для данного n . размер зоны доминирования HRR должна быть достаточной для применения решения.

Таким образом, HRR-решение — пример успешного применения асимптотического анализа и теории нелинейных собственных задач к проблеме концентрации напряжений у трещины в нелинейном материале.

Однако такой подход дает возможность найти только одно собственное значение, тогда как спектр собственных значений соответствующей линейной задачи является счетным.

В докладе обсуждаются вопросы, связанные с нахождением всего спектра собственных значений и соответствующих им собственных функций.

Литература

1. Чаплыгин Д.В., Белова О.Н., Степанова Л.В., Быкова Ю.С., Исследование асимптотики поля напряжений в окрестности вершины трещины в условиях ползучести с учетом поврежденности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, 3 (2024), 17–38. — DOI 10.15593/pern.mech/2024.3.02.

2. Быкова Ю.С., Степанова Л.В., Влияние процесса накопления повреждений на асимптотическое поведение полей напряжений в условиях ползучести образца с центральной трещиной // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, **29**:4 (2023), 7–25. — DOI 10.18287/2541-7525-2023-29-4-7-25.
3. Белова О.Н., Чаплий Д.В., Степанова Л.В., Применение пользовательской подпрограммы UMAT для решения задач нелинейной механики (обзор) // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, **27**:3 (2021), 46–73. — DOI 10.18287/2541-7525-2021-27-3-46-73.
4. *Stepanova L.V.*, Methods of perturbation theory and their applications in nonlinear fracture mechanics: From the pioneering studies by Hutchinson, Rice and Rosengren until today // Material Design & Processing Communications, **3**:6 (2021), 95. — DOI 10.1002/mdp2.95.

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ГЕНЕРАТИВНО-СОСТЯЗАТЕЛЬНОЙ СЕТИ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Г.С. Анисимов, Л.В. Степанова

anisimov.gs@ssau.ru, stepanova.lv@ssau.ru

УДК 004.8, 535, 539.3

Для решения проблемы недостатка экспериментальных данных в механике разрушения предлагается подход на основе генеративно-состязательных сетей (Generative Adversarial Networks, GAN). Модель синтезирует реалистичные данные для расширения выборки. Использование синтезированных данных позволило достичь высокой точности расчётов: отклонение определяемых параметров механики разрушения от эталонных значений составило не более 5 процентов.

Ключевые слова: интерференционно-оптические методы, генеративно-состязательная сеть, генерация изображений

Современные исследования подтверждают эффективность цифровой адаптации классических методик [1-4], при этом задача реалистичного синтеза сложных полей напряжений остаётся малоизученной. Авторами исследуется потенциал генеративно-состязательных сетей (GAN) для её решения. Предлагаемый алгоритм предназначен для автоматизированного синтеза поляризационно-оптических изображений, моделирующих напряжённо-деформированные состояния в материалах. Для этого была разработана и апробирована архитектура генеративно-состязательной сети, включающая генератор, обучающийся фиксировать сложные распределения реальных экспериментальных данных, и дискриминатор, задачей которого является оценка происхождения изображения (реальные экспериментальные данные или синтез генератора).

Фундаментальная задача, решаемая генеративно-состязательной сетью, формулируется в терминах теории вероятностей и заключается в минимизации метрики различия между распределением реальных данных $p_{data}(x)$ и распределением сгенерированных данных $p_g(x)$. В классической работе И. Гудфеллоу [5] для этой цели предлагается использовать дивергенцию Дженсена-Шеннона — симметричную и сглаженную версию дивергенции Кульбака-Лейблера, которая измеряет, насколько одно вероятностное распределение отличается от другого. Данная задача сводится к поиску параметров генератора, минимизирующих расхождение между этими распределениями, и достигается через одновременное обучение двух моделей в рамках минимаксной игры со следующей целевой функцией [6]:

$$\min_G \max_D V(D, G) = \mathbb{E}_{x \sim p_{data}(x)} [\log D(x)] + \mathbb{E}_{z \sim p_z(z)} [\log(1 - D(G(z)))]$$

где z — случайный шумовой вектор из априорного распределения $p_z(z)$, $G(z)$ — данные, сгенерированные сетью генератора, $D(x)$ — вероятность,

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 25-21-00272).

Анисимов Геннадий Сергеевич, аспирант, Самарский университет (Самара, Россия); Gennadij Anisimov (Samara University, Samara, Russia)

Степанова Лариса Валентиновна, д.ф.-м.н., профессор, Самарский университет (Самара, Россия); Larisa Stepanova (Samara University, Samara, Russia)

присваиваемая дискриминатором тому, что x принадлежит к реальным данным, $\mathbb{E}$ — математическое ожидание.

Модель взаимодействия компонентов генеративно-сопоставительной сети (генератора и дискриминатора) в ходе итеративного процесса обучения визуализирована на рис. 1.

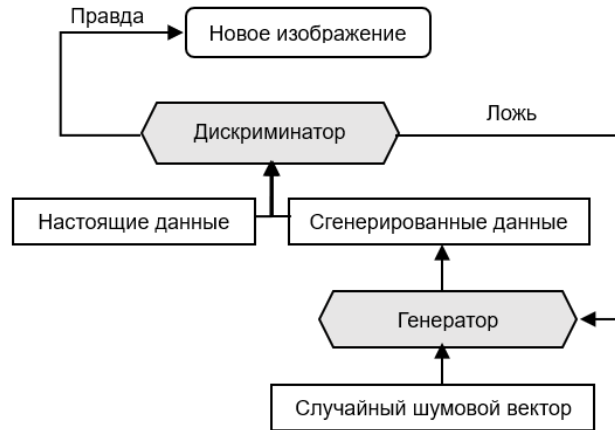


Рис. 1: Алгоритм работы генеративно-сопоставительной нейронной сети

Разработанное программное обеспечение позволяет генерировать синтетические изображения, которые могут быть использованы для аугментации ограниченных экспериментальных наборов данных. Это, в свою очередь, открывает возможности для значительного повышения точности и надёжности алгоритмов машинного обучения, решающих задачи классификации и регрессии в механике разрушения, таких как автоматическое определение концентраторов напряжений и прогнозирование трещиностойкости материалов. Сгенерированное изображение представлено на рис.2.

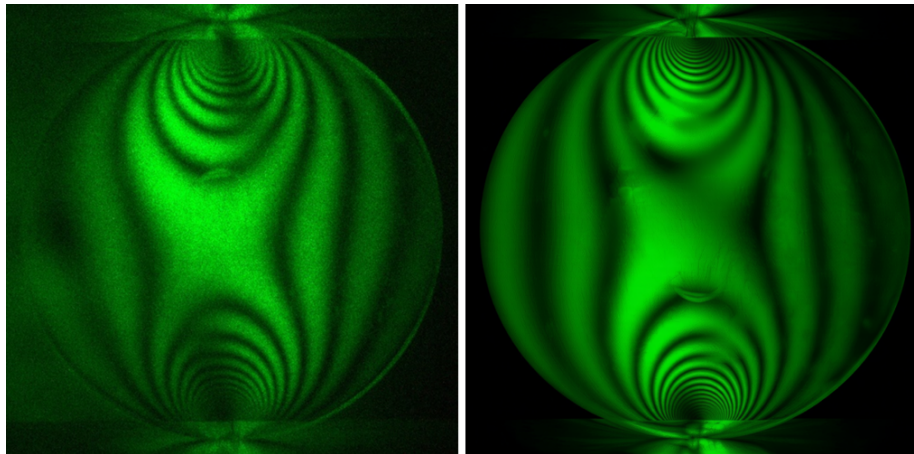


Рис. 2: Сравнение экспериментальной (слева) и синтезированной (справа) интерференционной картины полос образца, нагруженного сосредоточенными силами (метод голографической интерферометрии)

В результате проведенного исследования была экспериментально подтверждена эффективность применения генеративно-сопоставительных сетей

(GAN) для решения проблемы недостаточного объема данных в задачах механики разрушения. Разработанная модель позволилакратно увеличить исходную выборку интерференционно-оптических изображений за счет синтеза новых реалистичных данных. Таким образом, задача нивелирования ограниченности экспериментальной базы данных была успешно решена, что открывает перспективы для широкого применения GAN в качестве инструмента аугментации данных в прикладных научных исследованиях.

Литература

1. *Анисимов Г.С., Степанова Л.В.*, Экспериментальное определение полей у вершины трещины: метод голографической интерферометрии и метод корреляции цифровых изображений // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, **3** (2024), 39–56.
2. *Степанова Л.В., Семенов Д.А., Анисимов Г.С.*, Применение метода голографической интерферометрии для реконструкции ряда М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, **29:1** (2023), 15–46.
3. *Brinez-de Leon J., Rico-Garcia M., Restrepo-Martinez A.*, PhotoelastNet: a deep convolutional neural network for evaluating the stress field by using a single-color photoelasticity image // Applied Optics, **61** (2022), 50–62.
4. *Ru M., Liu C., Wei Y.*, On enrichment strategies and methods to extract stress intensity factors using extended finite element method for biomaterials // Engineering Fracture Mechanics, **281** (2023).
5. *Goodfellow. I.*, Generative Adversarial Nets // Advances in Neural Information Processing Systems **27**, (2014), 2672–2680.
6. *Лантеев В.В., Данилов В.В., Герзет О.М.*, Исследование генеративно-сопоставительных сетей для синтеза новых медицинских данных // Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении, **2:8** (2020).

ПРИМЕНЕНИЕ ИСКУССТВЕННО-ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ И НЕЙРОСЕТЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

В.Н. Аниськин, В.И. Богословский, Т.В. Добудько, О.И. Пугач
vnaniskin@gmail.com, vib0705@mail.ru, tdobudko@mail.ru, o.pugach@pgsga.ru

УДК 378.147; 004.85

Определяются основные достоинства и недостатки предметно-дидактического потенциала искусственно-интеллектуальных и нейросетевых технологий в обучении математике и информатике, рассматриваются риски и вызовы, связанные с их использованием в образовательном процессе.

Ключевые слова: ИИ-технологии, нейросети, обучение математике и информатике

Искусственно-интеллектуальные и нейросетевые технологии (ИИ-технологии и нейросети) достаточно интенсивно применяются в настоящее время в обучении математике и информатике. Они относятся к категории сквозных цифровых технологий и вместе с робототехникой и сенсорикой; технологиями распределенного реестра и обработки больших данных; промышленным интернетом; новыми производственными технологиями, объединяющими цифровое моделирование и компьютерный инжиниринг, могут рассматриваться как перспективные средства будущего машинного и кибернетического обучения. Наше предположение базируется на уникальных и универсальных возможностях ИИ-технологий и нейросетей, функционирующих на основе искусственного интеллекта, который позволяет «имитировать когнитивные функции человека (включая поиск решений без заранее заданного алгоритма) и получать при выполнении конкретных задач результаты, сопоставимые с результатами интеллектуальной деятельности человека или превосходящие их» [1].

Принимая во внимание эти возможности, для определения степени эффективности предметно- и организационно-дидактического потенциала ИИ-технологий и нейросетей в обучении математике и информатике нами была предложена модель формирования цифровой культуры у студентов педагогического бакалавриата профилей «Математика», «Физика», «Информатика» на основе концепции информационно-дидактического холизма, объединяющего классические, современные и перспективные принципы дидактики с учетом возможностей сквозных цифровых технологий и особенностей современной информационно-образовательной среды [2]. При этом,

Аниськин Владимир Николаевич, к.п.н., доцент, Самарский государственный социально-педагогический университет (Самара, Россия); Vladimir Aniskin (Samara State University of Social Sciences and Education, Samara, Russia)

Богословский Владимир Игоревич, к.ф.-м.н., д.п.н., профессор, Российский государственный педагогический университет имени А.И. Герцена (Санкт-Петербург, Россия); Vladimir Bogoslovsky, (Herzen University, St. Petersburg, Russia)

Добудько Татьяна Валерьяновна, д.п.н., профессор, Самарский государственный социально-педагогический университет (Самара, Россия); Tatyana Dobudko (Samara State University of Social Sciences and Education, Samara, Russia)

Пугач Ольга Исааковна, к.п.н., доцент, Самарский государственный социально-педагогический университет (Самара, Россия); Olga Pugach (Samara State University of Social Sciences and Education, Samara, Russia)

дидактический потенциал ИИ-технологий и нейросетей рассматривается нами с позиции цифровой трансформации содержания образования. Мы понимаем под ним холистичную (целостную) интегративную совокупность дидактических свойств и функций аппаратных и программных средств реализации этих технологий, которые могут эффективно использоваться не только для дифференциации, персонализации и оптимизации обучения математике и информатике, а и для решения задач организации и управления образовательным процессом, формирования и развития предметных, профессиональных и универсальных компетенций у студентов по заранее определенному алгоритму (ФГОС ВО, ОПОП и др.). Роль дидактических свойств и функций ИИ-технологий и нейросетей играют их конструктивно-обусловленные возможности, которые явно и продуктивно проявляются в обучении математике и информатике. Относительно характеризуемых технологий мы делаем такое утверждение, исходя из некоторых вариантов трактовки учеными основ феномена ИИ-технологий и нейросетей. Так, например, в работе [3] ИИ-система определяется как «автоматизированная информационная система для решения трудных задач, не имеющих известного алгоритма решения», а искусственные нейронные сети (ИНС) рассматриваются в качестве математических моделей и их программной или аппаратной реализации.

Упомянутая дидактическая модель проектировались и реализовывались нами в порядке эксперимента с использованием концепции информационно-образовательного холизма для интеграции и объединения у студентов предметных знаний, умений, навыков и компетенций посредством их формирования и развития в информационно-образовательной среде вуза с использованием ИИ-технологий, нейросетей и других сквозных технологий. По итогам нашей экспериментальной работы можно утверждать, что применимо к предметно-профессиональной подготовке учителей математики и информатики использование дидактического потенциала ИИ-технологий и нейросетей позволяет обеспечивать реализацию синергетического подхода и достигать эффекта эмерджентности, т.е. генерирования у обучающихся нового личностного качества за счет системного объединения средств, форм, методов обучения в условиях вузовского кванториума и технопарка универсальных педагогических компетенций [4]. Одним из аргументов, подтверждающим правильность и продуктивность наших организационно-педагогических подходов к проектированию процесса обучения математике и информатике студентов бакалавриата и магистратуры профилей «Математика» и «Информатика» с использованием дидактического потенциала ИИ-технологий и нейросетей может служить повышение показателей текущей и промежуточной успеваемости, уровня мотивации обучающихся к изучению дисциплин предметно-методического модуля, а также довольно-таки высокие результаты участия студентов в региональных и всероссийских конкурсах и олимпиадах.

Собственный опыт и мнения авторов работ [5–8] показывают, что для содержательного наполнения лабораторно-практической части занятий по математическим и компьютерным дисциплинам с применением дидактического потенциала ИИ-технологий и нейросетей эффективны и целесообразны уже известные и часто применяемые программы, приложения, платформы и инструменты на основе искусственного интеллекта, такие, например, как: программа Merlin AI для выполнения домашних заданий; образова-

тельный эквалайзер и личный репетитор Wolfram Alpha для решения математических задач и примеров при помощи камеры смартфона; математическая платформа Smodin Omni для решения сложных задач; образовательная платформа Brilliant для изучения математических концепций и исследования стратегии решения задач; универсальная платформа Microsoft Math Solver для пошагового выполнения задания и генерирования наглядных материалов, улучшающих понимание и способы решения задач обучающимися; интерактивная веб-страница TensorFlow Playground для экспериментирования с различными параметрами; приложение Photomath и др. В работе [6] отмечается, что нейросети позволяют создавать такие интерактивные, визуализированные задания по высшей математике в форме онлайн-курсов, интерактивных задач или симуляций многомерных объектов, функций и пространств, которые помогают студентам лучше понимать и усваивать учебный материал, закреплять знания, экспериментируя с параметрами и наблюдая как их изменение влияет на результаты решений, при изучении таких дисциплин, как математический анализ или линейная алгебра. В этой же работе делается вывод о том, что современные ИИ-системы «обучены так, что они могут выполнять сложные математические расчеты, решать уравнения, интегралы, производные и другие задачи, что значительно облегчает процесс изучения для студентов» [6].

Вместе с тем, необходимо отметить, что интенсивность применения ИИ-технологий и нейросетей в обучении математике и информатике и в образовании, в целом, пока еще недостаточно высока и их дидактическая целесообразность вызывает много сомнений у преподавателей. Объясняется это тем, что использование таких уникальных и универсальных цифровых технологий в образовании сопряжено с новыми вызовами и рисками, среди которых наиболее заметными являются: обеспечение конфиденциальности данных и безопасности авторских прав; сложности с внедрением и правильной эксплуатацией, необходимость постоянного обновления, что требует значительных ресурсов; неравенство в доступности для участников образовательного процесса; недостаточно высокое качество обучающего и контролирующего контента; риск потери собственных когнитивных навыков; некоторые морально-этические и др. вопросы, выражающиеся в страхах и тревожности в связи с возможностью потери смысла в обучении и выборе профессии [3; 6; 9].

Относительно этих и других недостатков в организации обучения высшей математике с использованием ИИ-технологий и нейросетей авторы работы [8] отмечают, что «при решении задач, требующих участия человеческого интеллекта, искусственный интеллект может быть только вспомогательным инструментом», а «автоматизированная процедура доказательства математических теорем с использованием искусственного интеллекта (включая нейронные сети) не способствует пока достижению «естественной цели обучения высшей математике» — научить студента логическому мышлению. В унисон этому мнению звучит и предостережение автора работы [6] о том, что «использование нейросетей для решения математических задач может привести к снижению качества обучения высшей математике, так как студенты могут потерять навыки критического мышления и анализа», а это, в свою очередь, будет отрицательно сказываться на качестве подготовки выпускаемых вузом специалистов. Поэтому мы согласны с утверждением авторов работы [10] о том, что именно преподаватель, неза-

висимо от преподаваемой им дисциплины, должен оставаться центральной, системообразующей фигурой в учебном процессе для обеспечения должной индивидуальной поддержки, мотивации студентов к изучению своей дисциплины, развития критического мышления и учета негативных и этических аспектов использования ИИ-технологий и нейросетей.

Приведенные подходы к определению роли и места предметно- и организационно-дидактического потенциала ИИ-технологий и нейросетей, вызовов и рисков их применения в обучении математике и информатике показывают, что в современном высшем образовании искусственный интеллект пока еще «не является универсальным решением и не может заменить традиционные методы обучения и преподавателя» [10]. Однако, наряду с этим, процессы цифровой трансформации образования обуславливают интенсивное внедрение новейших и перспективных цифровых технологий в учебный процесс образовательных организаций всех уровней. Следовательно, нет оснований сомневаться в том, что ИИ-технологии и нейросети, а также другие сквозные технологии могут стать уже в недалеком будущем основными универсальными средствами обучения в условиях единой информационно-образовательной среды.

Литература

1. *Национальная стратегия развития искусственного интеллекта на период до 2030 г.* Утверждена Указом Президента РФ от 10.10.2019 г. № 490 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.kremlin.ru/acts/bank/44731>. (дата обращения: 29.10.2025).
2. *Анисъкин В.Н., Добудько Т.В.*, Дидактическая модель формирования цифровой культуры студентов педагогического бакалавриата // *Цифровые, компьютерные и информационные технологии в науке и образовании: сб. статей.* — Брянск: БГУ, 2025. — 46–50.
3. *Рустамов Б.М.*, Искусственный интеллект и математическое моделирование // *Символ науки*, 5–2 (2023), 141–142.
4. *Анисъкин В.Н., Богословский В.И., Добудько Т.В.*, Особенности профессиональной подготовки будущих учителей математики в условиях холистичной образовательной среды // *Инновационные подходы к обучению математике в школе и вузе: сб. материалов.* — Омск: Омский гос. пед. ун-т, 2025. — 316–320.
5. *Черепова К.Г., Новикова О.В., Мореншильдт И.К.*, Место и роль искусственного интеллекта на уроках математики // *Молодой ученый*, 45(492) (2023), 127–129.
6. *Ветренко Е.А.*, Исследование эффективности и потенциала использования нейросетей в процессе обучения математическим дисциплинам в вузе // *Вестник науки*, 3:11(80) (2024), 578–585.
7. *Колобаев В.К., Морозова И.К.*, Возможности использования искусственного интеллекта в обучении математике // *Мир педагогики и психологии*, 08 (97) (2024), 39–43.
8. *Апатов Н.В., Гапонов А.И., Смирнова О.Ю.*, Возможности искусственного интеллекта в обучении высшей математике // *Ученые записки Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского*, 7(73):2 (2021), 27–39.
9. *Китаева Ф.С.*, Возможности и ограничения применения технологий искусственного интеллекта в развитии педагогических инструментов персонализации обучения // *Финансовые рынки и банки*, 9 (2024), 17–20.
10. *Оракова М.М., Бориева М.К., Нагаплежеева Р.Р., Текуева А.А., Цеева З.А.*, Интеграция AI-технологий в процесс изучения иностранных языков в вузе // *Известия Тульского гос. университета. Педагогика*, 2 (2025), 84–89.

ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННАЯ ФИКСАЦИЯ АКАДЕМИЧЕСКИХ ДОСТИЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ NFT

В.А. Артамонов

vladartamonov3@gmail.com

УДК 004.78

В работе рассматриваются децентрализованные методы фиксации образовательных результатов с использованием невзаимозаменяемых токенов, формирующих устойчивую среду цифрового подтверждения компетенций в высшем образовании. Анализируется потенциал технологии блокчейн для повышения прозрачности академических процессов и формирования надежных механизмов проверки подлинности сведений.

Ключевые слова: блокчейн, невзаимозаменяемый токен, геймификация

Современное высшее образование сталкивается с проблемой недостаточной мотивации студентов к учебе, особенно на фоне растущей цифровизации и множества отвлекающих факторов. [1,2] Одним из подходов к повышению вовлеченности является геймификация, основанная на внедрении игровых механик (баллы, значки, награды, рейтинги) в образовательный процесс, чтобы сделать обучение более привлекательным. Наряду с различными педагогическими инновациями перспективным направлением является применение технологий распределенных реестров и невзаимозаменяемых токенов (Non Fungible Token, NFT) для фиксации результатов и достижений обучающихся. [3,4] Такая форма организации данных обеспечивает сохранность сведений, устойчивой к несанкционированному изменению информации благодаря криптографическим методам контроля целостности. [5,6] Децентрализованные записи позволяют также обеспечить независимую проверку различными образовательными и экспертными структурами, что повышает доверие и укрепляет прозрачность академических процессов.

Помимо обеспечения подлинности, применение NFT для фиксации достижений открывает новые возможности мотивации. [7] Получение цифрового трофея в виде уникального токена за учебные успехи способно стимулировать студентов и превращает процесс обучения в игру с чёткими целями и призами. Награды привязаны к личному блокчейн-адресу и могут демонстрироваться работодателям или другим образовательным учреждениям как подтверждение освоенных навыков.

Токенизация достижений обладает рядом преимуществ перед традиционными бумажными свидетельствами. [8] Повышается удобство хранения и представления данных, предоставляется возможность собрать все сертификаты субъекта, выданные разными вузами и организациями, в одном едином доверенном электронном портфолио. Процедуры проверки подлинности существенно упрощаются, поскольку заинтересованная сторона может

Артамонов Владислав Андреевич, студент, Самарский государственный экономический университет (Самара, Россия); Artamonov Vladislav Andreevich (student, Samara State University of Economics, Samara, Russia), работа под научным руководством Олина Романа Александровича (старший преподаватель, Самарский государственный экономический университет)

оперативно получить доступ к соответствующей записи в распределённом реестре без необходимости направлять запросы в учебные заведения. [9] Применение токенов снижает риск подделки сведений, способствует прозрачному мониторингу образовательной траектории на протяжении всей жизни и обеспечивает надёжное хранение данных.

Каждый NFT сертификат может содержать не только запись в распределённом реестре, но и связанную цифровую копию диплома или приложения с итогами обучения, размещённую во внешнем децентрализованном хранилище. Для решения этой задачи подходит сеть IPFS (InterPlanetary File System), функционирующая на основе распределённого протокола, в котором данные размещаются на множестве независимых узлов и идентифицируются уникальным криптографическим хешем содержимого, гарантирующего неизменность файлов. В практической реализации метаданные NFT сертификата включают ссылку IPFS, которая указывает на источник с подробными сведениями об образовательном результате. Смарт контракт при создании токена фиксирует соответствующий хеш и присваивает право владения цифровому кошельку обучающегося. Подробные сведения, такие как личные данные и информация об освоенных дисциплинах, располагаются вне цепочки блоков, однако любой пользователь, имеющий доступ к сертификату, способен перейти по закреплённой ссылке и проверить корректность документа путем сопоставления хеша. Любая попытка изменения файла приводит к расхождению идентификаторов, дополнительно предусмотрена возможность шифрования конфиденциальных данных в исходном файле, вследствие чего в реестре сохраняется только криптографический отпечаток, а доступ к содержанию документа получает только обладатель соответствующего ключа.

Одной из принципиальных задач при внедрении блокчейн сертификатов является исключение возможности их передачи другим лицам. Классические NFT создавались для свободного обращения между пользователями, что делает их недостаточно подходящими для фиксации образовательных результатов, поскольку академическое удостоверение должно оставаться связанным с конкретным субъектом. [10] В связи с этим должны использоваться специальные механизмы, обеспечивающие постоянную привязку цифрового сертификата к его владельцу и предотвращающие любые операции по передаче. Закрепленные за блокчейн-адресом токены (soulbound tokens) после выпуска не могут менять владельца, поскольку смарт контракт запрещает выполнение подобных действий.

Использование указанного подхода обеспечивает ряд существенных преимуществ. [11] Повышается устойчивость образовательных удостоверений к подделке, поскольку изменение записей в распределённом реестре практически невозможно, а предъявление несуществующего документа выявляется моментальной проверкой наличия соответствующего токена, что ограничивает возможности мошеннической деятельности и снижает вероятность трудоустройства специалистов с фальсифицированными документами. Обучающиеся получают надёжное хранение данных об образовательной траектории, поскольку цифровое подтверждение не зависит от физических носителей или локальных архивов. [12,13] Дополнительным преимуществом становится повышение международной мобильности, так как проверка под-

линности блокчейн сертификатов осуществляется глобально и не требует обращения к национальным информационным системам.

Использование NFT сертификатов способно сформировать значимый компонент образовательной инфраструктуры нового поколения, предполагающей тесную интеграцию цифровых технологий, персонализированных траекторий обучения и надёжного функционала подтверждения полученных квалификаций. Внедрение децентрализованных механизмов повышает прозрачность академической деятельности и способствует созданию адаптивной и ориентированной на пользователя модели образования.

Литература

1. Новиков С.Я. Можно ли научить пониманию / Новиков С.Я. // Образование в современном мире: профессиональная подготовка кадрового потенциала с учетом передовых технологий. — Самара: «Ваш Взгляд», 2018. — 375–378. — EDN YYDEMX.
2. Воропаева Н.В. Контекстный подход к обучению математике при подготовке магистров и аспирантов / Воропаева Н.В., Соболев В.А., Щепаккина Е.А. // Образование в современном мире: профессиональная подготовка кадрового потенциала с учетом передовых технологий. — Самара: «Ваш Взгляд», 2018. — 37–40. — EDN YYDDSP.
3. Олин Р.А., Инновации и управление рисками с использованием NFT / Олин Р.А. // Наука XXI века: актуальные направления развития, 2–2 (2023), 292–298. — DOI 10.46554/ScienceXXI-2023.09-2.2-pp.292. — EDN YCZSUI.
4. Живцов В.Ю., Токенизация репутации / Олин Р.А., Живцов В.Ю., Портнов К.В. // Экономика и предпринимательство, 11(184) (2025), 715–719.
5. Бондаренко В.В. Методы обеспечения безопасности данных в распределённых системах искусственного интеллекта / Олин Р.А., Бондаренко В.В. // Актуальные проблемы радиоэлектроники и телекоммуникаций. — Самара: ООО "АРТЕЛЬ 2025. — 198–200. — EDN ITHYTA.
6. Олин Р.А. Анализ эффективности реализации алгоритмов хеширования в оптических вычислителях / Олин Р.А., Бондаренко В.В., Волохович М.А. // Актуальные проблемы радиоэлектроники и телекоммуникаций. — Самара: ООО "АРТЕЛЬ 2025. — 201–203. — EDN OBJNSK.
7. Федина М.Е. Поиск решения задачи и развитие креативности / Новиков С.Я., Федина М.Е. // Образование в современном мире: ключевые тренды трансформации. — Самара: Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 2022. — 302–304. — EDN SVSKEQ.
8. Samala A.D., Rawas S., Zainuddin Z., Howard N.J., Shilina S., The role of non-fungible tokens in education: a comprehensive review and future directions // Social Sciences & Humanities Open, **12** (2025), art. no. 101834. — DOI: 10.1016/j.ssaho.2025.101834.
9. Портнов К.В., Смарт-контракты как инструмент автоматизации и оптимизации бизнес-процессов / Олин Р.А., Ермолина Л.В., Портнов К.В. // Экономика и предпринимательство, 10 (183) (2025), 793–797. — EDN BFQVNQ.
10. Onete C.B., Albăstroi Năstase I., Felea M., Dina R. The Potential of Non-Fungible Tokens (NFTs) in Higher Education as Perceived by Romanian Students [Электронный ресурс] // 2022. 8th BASIQ International Conference on New Trends in Sustainable Business and Consumption. Graz, Austria, 25-27 May 2022. — Bucharest: ASE, 2022. — 804–811. URL: https://www.conference.ase.ro/wp-content/uploads/2022/06/22106_Final.pdf (дата обращения: 25.10.2025)
11. Khatri P., Shrestha A.K., Vassileva J., Student Certificate Sharing System Using Blockchain and NFTs [Электронный ресурс] // arXiv preprint, 2023. URL: <https://arxiv.org/pdf/2310.20036> (дата обращения: 27.10.2025)

12. Щепакина Е.А. Реализация современных трендов развития высшей школы при подготовке магистров и аспирантов математического профиля / Воропаева Н.В., Соболев В.А., Федина М.Е., Щепакина Е.А. // Образование в современном мире: стратегии развития в условиях инновационных изменений. — Самара: Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 2024. — 159–162. — EDN WDXWVS.

13. Новиков, С.Я. Опыт воспитания ответственности студентов механико-математического факультета Самарского университета / Новиков С.Я., Федина М.Е. // Образование в современном мире: практики цифровой трансформации. — Самара: Ваш Взгляд, 2021. — 439–446. — EDN FFTWFX.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИЗЕМНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ С УЧЕТОМ ЛОКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ВЕТРА

Н.А. Баранов
barnik.al@gmail.com

УДК 51-7

В данной работе представлен подход к построению пространственного распределения загрязняющего вещества по данным измерений нескольких станций мониторинга. Традиционная интерполяция радиальными базисными функциями, зависящими только от расстояния, не позволяет учесть анизотропный характер распространения загрязняющих веществ при наличии ветра. Предложено вместо декартова расстояния вычислять эффективное расстояние между точками, которое является функцией направления и скорости ветра.

Ключевые слова: интерполяция, радиальные базисные функции, распределение загрязняющего вещества

Пусть известны измеренные значения концентраций c_i в точках измерений S_i . Необходимо рассчитать значения концентраций q_j в узлах сетки N_j .

Будем вычислять значения концентраций q_j в узлах сетки N_j в виде взвешенной суммы вида

$$q_j = \sum_{i=1}^M w(R_{ji}) \cdot \hat{c}_i. \quad (1)$$

где w - радиальная базисная функция, определяющая влияние значения в точке измерения на величину концентрации в расчетной точке [1], $\hat{c}_i$ - приведенное значение измеренной концентрации в точке S_i .

Приведенное значение концентрации вычисляется как решение

$$\hat{c}_i = \sum_{k=1}^M w(R_{ik}) \cdot \hat{c}_k, i = 1, \dots, M. \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) вместо евклидова расстояния r_{ji} между точками S_i и N_j используется приведенное расстояние R_{ji} между ними.

Приведенное расстояние R_{ji} между точками S_i и N_j вычисляется из следующих соображений.

Каждая точка измерений принадлежит некоторой линии уровня. В штилевых условиях линии равного уровня влияния измерений в i -й точке наблюдений на распределения концентрации загрязняющего вещества являются окружностями с центром в этой точке. При наличии ветра эти окружности преобразуются в изоконцентрические эллипсы [2, 3]. Один из фокусов эллипса является точкой измерений, главная ось которого совпадает с направлением скорости ветра в точке измерений. Величины большой a_{ij} и малой b_{ij} осей эллипса связаны между собой соотношениями

$$a_{ij}^2 + b_{ij}^2 = 2 \cdot R_{ji}^2, \quad a_{ij}^2 = b_{ij}^2 + \alpha \cdot 2 \cdot R_{ji}^2 \cdot f(v_i), \quad (3)$$

Баранов Николай Алексеевич, д.техн., Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН (Москва, Россия); Nikolay Baranov (Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Russia)

где $f(v_i)$ - функция сигмоидного вида, учитывающая влияния скорости ветра в точке измерений на соотношение большой и малой оси эллипса влияния, $0 \leq \alpha \leq 1$, а уравнение эллипса имеет вида

$$r_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot (1 - \epsilon_{ij}^2)}{1 - \epsilon_{ij} \cdot \cos \theta_{ij}}, \quad (4)$$

ϵ_{ij} - эксцентриситет эллипса, θ_{ji} - угол между направлением ветра в точке S_i и направлением от точки измерений S_i к расчетной точке N_j .

С учетом соотношений (3), (4) имеем следующее уравнение для вычисления эффективного расстояния между точками S_i и N_j :

$$R_{ji} = r_{ji} \cdot \frac{1}{1 - (1 - 0.5 \cdot \alpha) \cdot f(v_i)} \cdot \left(\sqrt{1 + 0.5 \cdot \alpha \cdot f(v_i)} - \sqrt{f(v_i)} \cdot \theta_{ji} \right).$$

Отметим, что при вычислении приведенного расстояния используются локальные направление и скорость ветра в i -й точке измерений S_i .

Литература

1. *Barnes S.L.*, A Technique for Maximizing Details in Numerical Weather Map Analysis // J. Appl. Meteor. Climatol., **3** (1964), 396–409.
2. *Contreras L., Ferri C.*, Wind-sensitive Interpolation of Urban Air Pollution Forecasts // Procedia Computer Science, **80** (2016), 313–323.
3. *Lotrecchiano N., Sofia D., Giuliano A., Barletta D., Poletto M.*, Spatial Interpolation Techniques For innovative Air Quality Monitoring Systems // Chemical Engineering Transactions, **86** (2021), 391–396.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАЧЕСТВА ВИДЕОТЕЛЕФОНИИ НА ОСНОВЕ РАСШИРЕННОЙ МОДЕЛИ ТЕЛЕТРАФИКА

К.А. Батенков

pustur@yandex.ru

УДК 621.39

В работе предложена аналитическая модель качества видеотелефонии, основанная на расширенной очереди М/М/1/В с двумя приоритетными классами трафика. Модель учитывает параметры 20 современных аудио- и видеокодеков, механизмы FEC, фиксированные компоненты задержки и ограниченность буфера. Показано, что минимальная пропускная способность, обеспечивающая соблюдение порогов ITU-T (задержка не более 400 мс, потери – 1%, рассинхронизация – 80 мс), превышает суммарный битрейт на 40-50%. Эффективные кодеки (AV1, H.266, LCEVC) снижают требования к сети в 1.8-2.2 раза по сравнению с H.264.

Ключевые слова: видеотелефония, теория телетрафика, М/М/1/В, аналитическое моделирование, QoS, кодеки

Современные сервисы видеосвязи предъявляют строгие требования к качеству обслуживания (QoS). Согласно рекомендациям ITU-T G.114 и G.1010, для интерактивной видеотелефонии допустимы: сквозная задержка не более 400 мс, коэффициент потерь пакетов — не более 0,01, рассинхронизация аудио/видео — не более 80 мс [1]. При этом проектирование сетей требует инструментов, сочетающих точность и вычислительную эффективность [2].

В работе предложена аналитическая модель, расширяющая классическую систему массового обслуживания М/М/1/В [3, 4]. Введены два класса трафика: высокоприоритетный (аудио) и стандартный (видео). Сквозная задержка видеопотока рассчитывается как

$$D_v = \frac{L_{\text{avg}}}{C - R_{\text{total}}} \cdot 10^3 + d_{\text{codec},v} + d_{\text{prop}} + d_{\text{jitter}}, \quad (1)$$

где C — пропускная способность канала (бит/с), $R_{\text{total}} = R_a \eta_a + R_v \eta_v$ — суммарный битрейт с учётом FEC (η), L_{avg} — средний размер пакета в битах, $d_{\text{prop}} = 40$ мс — задержка распространения, $d_{\text{jitter}} = 70$ мс — джиттер-буфер.

Вероятность потерь [5, 6] определяется совместным влиянием переполнения буфера ($B = 20$ пакетов) и превышения допустимого времени доставки:

$$P_{\text{loss}} = 1 - (1 - P_{\text{buf}})(1 - P_{\text{deadline}}), \quad (2)$$

где $P_{\text{buf}} = \frac{(1-\rho)\rho^B}{1-\rho^{B+1}}$, $\rho = R_{\text{total}}/C$, а

$$P_{\text{deadline}} = \rho \cdot \exp(-(\mu - \lambda)T_{\text{max}}), \quad T_{\text{max}} = 0,4 \text{ с}. \quad (3)$$

Батенков Кирилл Александрович, д.т.н., профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Kirill Batenkov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Модель параметризована под 9 аудио- (Opus, EVS, LC3 и др.) и 11 видеокодеков (AV1, H.266/VVC, LCEVC, Daala, H.264 и др.).

На рис. 1 представлена зависимость задержки и потерь от пропускной способности для ключевых видеокодеков (аудио — Opus). Видно, что при $C \leq R_{\text{total}}$ система нестабильна: задержка стремится к бесконечности, потери — к 100%. Минимальная C , обеспечивающая соблюдение всех порогов, составляет: 0,60 Мбит/с для LCEVC, 0,72 Мбит/с для H.266, 0,78 Мбит/с для AV1 и 1,32 Мбит/с для H.264.

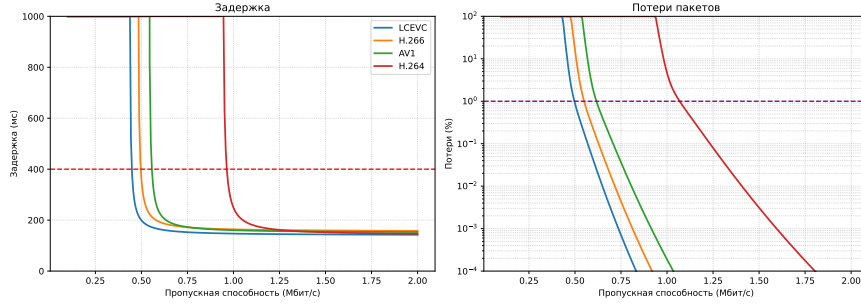


Рис. 1: Зависимость задержки (слева) и потерь (справа) от пропускной способности для различных видеокодеков (Opus + видео). Пунктирные линии — пороги качества.

Рассинхронизация (рис. 2) снижается с ростом C и зависит от разницы в битрейтах аудио и видео. Наибольшую стабильность демонстрируют симметричные пары (Opus + LCEVC).

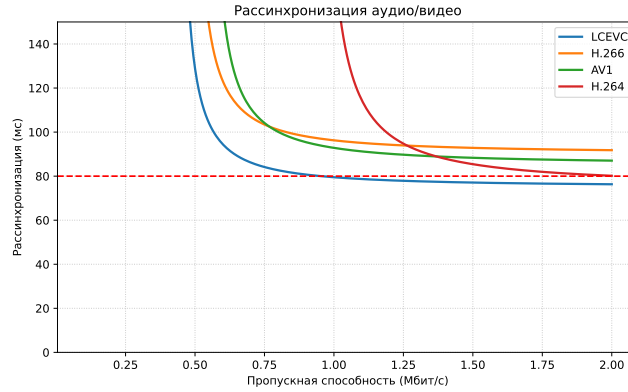


Рис. 2: Рассинхронизация аудио/видео как функция пропускной способности.

Таким образом, аналитическое моделирование подтверждает, что переход на современные кодеки позволяет радикально снизить требования к сети без ущерба для качества. Предложенная модель применима для проектирования QoS-политик и верификации SLA.

Литература

1. *ITU-T Recommendation G.114*. One-way transmission time. — Geneva: ITU, 2003.
2. *ITU-T Recommendation G.1010*. End-user multimedia QoS categories. — Geneva: ITU, 2001.
3. *Ross K. W.* Multiservice Loss Models for Broadband Telecommunication Networks // K. W. Ross. — London : Springer, 1995. — 206 p. — ISBN 978-1-4471-2128-2.
4. *Battista, Stefano & Meardi, Guido & Ferrara, Simone & Ciccarelli, Lorenzo & Maurer, Florian & Conti, Massimo & Orcioni, Simone* (2022). Overview of the Low Complexity Enhancement Video Coding (LCEVC) Standard. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*. 1-1. 10.1109/TCSVT.2022.3182793.
5. *Батенков А.А.*, Вероятность связности телекоммуникационной сети на основе приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий / А. А. Батенков, К. А. Батенков, А. Б. Фокин // Информационно-управляющие системы, 6 (115) (2021), 53–63. — DOI 10.31799/1684-8853-2021-6-53-63. — EDN AOUANJ.
6. *WebRTC Codec and Codec Parameter Requirements*. W3C Editor's Draft. — Geneva: W3C, 2023. URL: <https://www.w3.org/TR/webrtc-codec-requirements/> (дата обращения: 03.11.2025).

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЖАТИЕ ДИСКА С ОТВЕРСТИЕМ: КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД

Ю.Н. Бахарева
bakhareva.yun@ssau.ru

УДК 539.376

Настоящая работа посвящена комплексному исследованию поведения диска с центральным круговым отверстием в условиях механического сжатия. Для всестороннего понимания напряженно-деформированного состояния были применены три независимых подхода: аналитическое решение задачи, основанное на классических уравнениях теории упругости; численное моделирование с использованием метода конечных элементов; экспериментальное исследование с применением метода цифровой корреляции изображений.

Ключевые слова: эксперимент, корреляция изображений, поля перемещений и деформаций

Понимание закономерностей распределения механических напряжений и перемещений в деформируемых телах составляет одну из основных проблем современной механики твердого тела. В контексте достижения высокой точности при решении инженерных задач, комплексный подход, сочетающий аналитические, численные и экспериментальные методы, является общепризнанным стандартом [1, 2]. Настоящее исследование посвящено детальному анализу и сопоставлению результатов, полученных тремя различными методами, применительно к задаче о сжатии диска с отверстием, изготовленного из эпоксидной смолы. В рамках работы было проведено: аналитическое решение поставленной задачи с использованием постулатов классической теории упругости; численное моделирование с применением высокоэффективного метода конечных элементов; и экспериментальное определение полей деформаций с использованием метода цифровой корреляции изображений (DIC). Особое внимание уделяется сравнению и верификации полученных полей деформаций, рассчитанных методом цифровой корреляции изображений и методом конечных элементов.

Аналитическое решение задачи о сжатии сплошного диска получено в [3]. Внутреннюю поверхность диска, окружающую круговое отверстие, можно считать свободной от напряжений, предположив, что по выбранному цилиндрическому сечению приложены усилия, эквивалентные и противоположные уже имеющимся напряжениям, рассчитанным для сплошного образца. Тогда это сечение можно рассматривать как внутреннюю поверхность (контур) кольца. Компоненты напряжений представлены в виде суммы ряда:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} = \sum_m [(m-1)ma_m R_2^{m-2} + (m+2)(m+1)b_m R_2^m + m(m+1)\alpha_m R_2^{-m-2} + \\ + (m-2)(m-1)\beta_m R_2^{-m}] \cos m\theta, \\ \sigma_{rr} = \sum_m [m(1-m)a_m R_2^{m-2} + (m+2-m^2)b_m R_2^m - m(m+1)\alpha_m R_2^{-m-2} -\end{aligned}$$

Бахарева Юлия Николаевна, к.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Yuliya Bakhareva (Samara University, Samara, Russia)

$$\begin{aligned} & -(m-2+m^2)\beta_m R_2^{-m}] \cos m\theta, \\ \sigma_{r\theta} = \sum_m & [(m-1)ma_m R_2^{m-2} + m(m+1)b_m R_2^m - m(m+1)\alpha_m R_2^{-m-2} - \\ & -m(m-1)\beta_m R_2^{-m}] \sin m\theta, \end{aligned}$$

где $a_m, b_m, \alpha_m, \beta_m$ - произвольные постоянные, которые определяются из условий на наружном и внутреннем контурах кольца $r = R_1, r = R_2$. С помощью пакета символьных вычислений Maple вычислены коэффициенты ряда для количества слагаемых $m = 10$; учитывая закон Гука, получены компоненты тензора деформаций. Проведено компьютерное моделирование в пакете ANSYS, в результате которого были получены карты распределения компонент тензора деформации и вектора перемещения. Параллельно, на гидравлической установке, был проведен эксперимент с применением метода корреляции цифровых изображений (DIC). Система VIC-3D, отличающаяся бесконтактностью, универсальностью и высокой скоростью, позволяет детально изучить поля перемещений и деформаций образца.

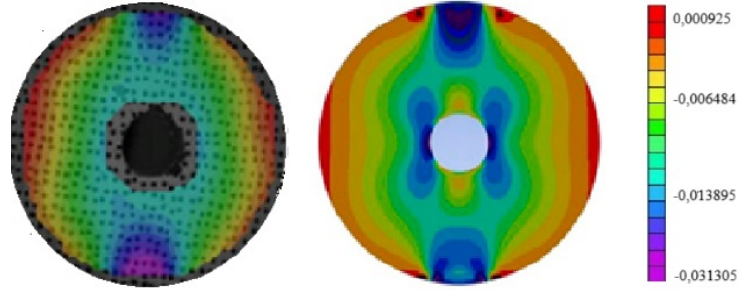


Рис. 1: Распределение компоненты тензора деформации ε_{xx} (слева - DIC, справа МКЭ)

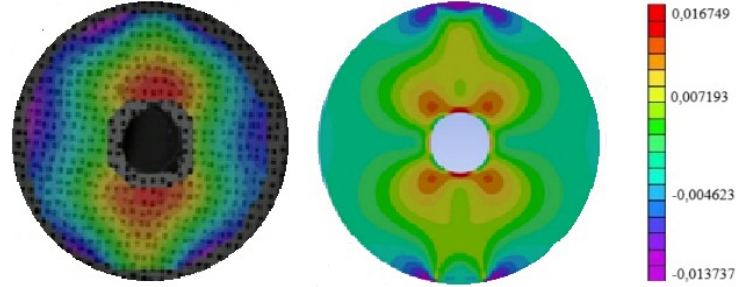


Рис. 2: Распределение компоненты тензора деформации ε_{yy} (слева - DIC, справа МКЭ)

DIC-технологии, в частности, система VIC-3D и аналогичные ей, демонстрируют высокую эффективность и перспективность для определения полей деформаций для разнообразных материалов и геометрических форм под действием различных механических воздействий [4]. Полученные в эксперименте данные были сопоставлены с результатами аналитического решения (теория упругости) и численного моделирования методом конечных элементов. Карты распределения полей деформации полученных методом

конечных элементов и методом цифровой корреляции изображений представлен на Рис. [1–3].

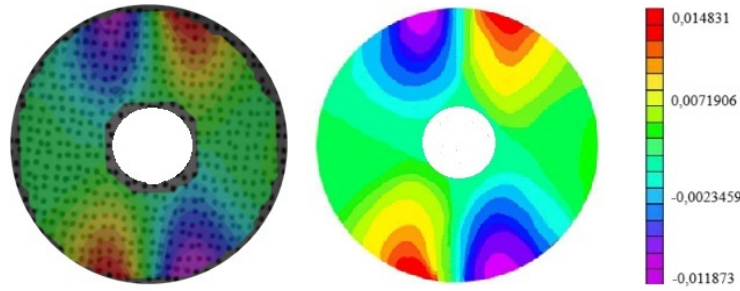


Рис. 3: Распределение компоненты тензора деформации ε_{xy} (слева — DIC, справа МКЭ)

Наблюдаемые расхождения между результатами различных методов объясняются комплексом факторов, включая: потенциальную несоосность образца при его установке в испытательную машину, точность калибровки оптической системы, характеристики нанесенного спекл-рисунка, условия освещения образца, а также общую погрешность оптического комплекса.

Литература

1. Анисимов Г.С., Степанова Л.В., Экспериментальное определение полей у вершины трещины: метод голографической интерферометрии и метод корреляции цифровых изображений // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, 3 (2024), 39–56. — DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.03.
2. Mironov A. V. , Petrova D. M. , Bakhareva Yu. N., Stepanova L. V., Extracting fracture mechanics parameters (higher-order coefficients of Williams series expansion) from FEM analysis and digital photoelasticity method // Journal of Physics: Conference Series, **1902**:1 (2021). — DOI: 10.1088/1742-6596/1902/1/012018.
3. Тимошенко С.П Прочность и колебания элементов конструкций. — Москва: Наука, 1975.
4. Sutton M.A., Orteu J.J., Schreier H. Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements. — Springer, 2009.

АТОМИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ АЛЮМИНИЕВОЙ ПЛАСТИНЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ НА КРЕМНИЕВОЙ ПОДЛОЖКЕ

О.Н. Белова, Л.В. Степанова

belova.on@ssau.ru, stepanova.lv@ssau.ru

УДК 517.518

В работе проведено атомистическое моделирование усталостного разрушения алюминиевой пластины, находящейся на кремниевой подложке. Выполнен анализ работ, направленных на исследование и моделирование взаимодействия алюминия и кремния. Молекулярно-динамическое моделирование выполнено в пакете LAMMPS.

Ключевые слова: молекулярная динамика, кремний-алюминий, потенциалы взаимодействия, LAMMPS

Усилия многих научных школ в настоящее время направлены на изучение аспектов наномасштабного взаимодействия Al-Si [1-3]. Потенциал внедренного атома EAM (embedded atom method) широко используется для системы Al-Al. Взаимодействие Si-Si описывается с помощью множества классических потенциалов. В работе [4] приведен сравнительный анализ порядка десяти различных потенциалов межатомного взаимодействия для кристаллического кремния. Для описания межатомного взаимодействия Al-Si существует несколько подходов. Можно потенциал Al-Si описать в рамках модифицированного EAM потенциала (MEAM). Авторами [5] предложен ADP (angular dependent potential). Можно объединить потенциал для кремния Stillinger-Webera с потенциалом EAM металла [6]. Кроме предложенных решений LAMMPS предоставляет возможность пользователю разработать гибридные потенциалы для взаимодействия между различными атомами и таким образом использовать комбинации разных типов потенциалов, как в работах [1-3].

Выполнено моделирование циклического нагружения Al пластины, расположенной на Si подложке. Радиус пластины и подложки выбран равным 139.386 Å, толщина пластины равна 9 Å, толщина подложки равна 40 Å, радиус выреза в подложке под пластиной равен 70 Å. Геометрия образца и схема приложения нагрузки представлены на рис. 1.

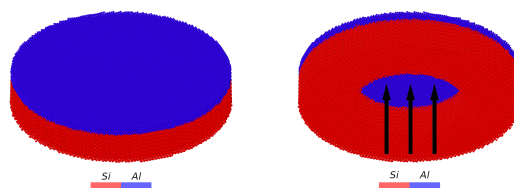


Рис. 1: Геометрия и схема приложения нагрузки

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 25-21-00272).
Белова Оксана Николаевна, к.т.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия);
Oksana Belova (Samara University, Samara, Russia)
Степанова Л.В., д.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Larisa
Stepanova (Samara University, Samara, Russia)

Al пластина содержала 37571 атомов, а Si подложка – 93676 атомов. В первой серии вычислений для описания межатомного взаимодействия Si-Al был применен MEAM потенциал. На рис. 2 приведена геометрия модели с течением времени в моменты времени 4, 6 и 10 пс. Во второй части был использован ADP потенциал, предложенный в работе [5]. Результаты моделирования приведены на рис. 3 Сила прикладываемая к пластине подчинялась синусоидальному закону, где амплитуда равна 0.005 эВ/Å, период колебания равен 10 пс.

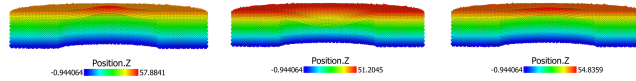


Рис. 2: Деформация пластины с течением времени (MEAM)

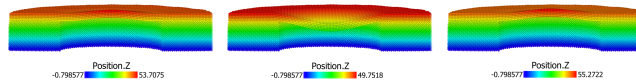


Рис. 3: Деформация пластины с течением времени (ADP)

Результаты моделирования с использованием этих потенциалов схожи при данных условиях моделирования.

Показано, что в вопросе выбора потенциала взаимодействия существует несколько подходов к моделированию систем Al-Si. Можно использовать классические потенциалы, либо разработать потенциал самостоятельно, например, с помощью перспективного и набирающего популярность, машинного обучения. Каждый из подходов может быть использован в зависимости от требования к ресурсам, точности результата и физики моделируемого процесса.

Литература

1. *Zhang H., Xia Z.N.*, Molecular dynamics simulation of cluster beam Al deposition on Si (100) substrate // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, **160** (2000), 372–376.
2. *Malik Rizwan, Shi Tielin, Tang Zirong, Peng Ping*, Al-Film/Si-Substrate System Nanoscratching Response Based upon Molecular Dynamics Simulation in NEMS // Defect and Diffusion Forum, **316–317** (2011), 107–117.
3. *Zhang Zhibo, Alhafez Iyad Alabd, Urbassek Herbert M.*, Scratching an Al/Si Interface: Molecular Dynamics Study of a Composite Material // Tribology Letters, **66**:86 (2018).
4. *Мажукин В.И., Шапранов А.В., Руденко А.В.*, Сравнительный анализ потенциалов межатомного взаимодействия для кристаллического кремния // Mathematica montisnigra, XXX (2014), 56–75.
5. *Starikov S., Gordeev I., Lysogorskiy Y., Kolotova L., and Makarov S.* Optimized interatomic potential for study of structure and phase transitions in Si-Au and Si-Al systems // Computational Materials Science, **184** (2020), art. no. 109891.
6. *Saidi P., Frolov T., Hoy J.J., Asta M.*, An angular embedded atom method interatomic potential for the aluminum-silicon system // Model. Simul. Mater. Sci. Eng., **22** (2014), art. no. 055010.

АНАЛИЗ АСИМПТОТИКИ И АВТОМОДЕЛЬНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ОКРЕСТНОСТИ ТРЕЩИНОПОДОБНОГО ДЕФЕКТА В ПЛАСТИНЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ С УЧЕТОМ РОСТА ПОВРЕЖДЕННОСТИ

О.Н. Белова, Л.В. Степанова, Д.В. Чаплий

belova.on@ssau.ru, stepanova.lv@ssau.ru, dch300189@yandex.ru

УДК 517.518

Работа посвящена анализу асимптотики и автомодельности полей напряжений, деформаций и поврежденности в окрестности трещиноподобного дефекта. Нагружение пластины с центральной трещиной реализуется в условиях ползучести с учетом накопления повреждений. В расчетную схему конечно-элементного пакета включены определяющие соотношения и кинетическое уравнение Качанова-Работнова.

Ключевые слова: механика разрушения, поврежденность, уравнение Качанова-Работнова

В процессе эксплуатации конструкционных материалов в высокотемпературном режиме в них развиваются необратимые микроструктурные изменения, такие как образование пор и трещин. Данное явление, известное как поврежденность материала, является следствием накопления пластических и деформаций ползучести и ведет к значительному сокращению ресурса конструкций. Для количественного описания кинетики развития повреждений в условиях ползучести Л. М. Качановым и Ю. Н. Работновым был введен параметр поврежденности ω . Для одноосного случая поведение материала в условиях ползучести с учетом первой и второй стадии может быть описано зависимостью $\dot{\varepsilon}^{cr} = B\sigma^n t^m$. Данное уравнение называется уравнением Бейли-Нортон и справедливо при изотермических условиях нагружения. Введение множителя t^m позволяет учитывать начальную стадию ползучести. Примем следующую зависимость для скорости изменения поврежденности $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{At^m \sigma_0^\chi}{(1-\omega)^\varphi}$, где $A, B, m, n, \chi, \varphi$ – параметры модели для данного материала. Вследствие ползучести накапливаются повреждения, которые приводят к разрушению конструкций. Уравнение состояния для установившейся ползучести с учетом параметра поврежденности запишем в виде

$$\varepsilon^{cr} = \frac{d\varepsilon}{dt} = Bt^m \left(\frac{\sigma_0}{1-\omega} \right)^n. \quad (1)$$

При одноосном нагружении время до разрушения определяется из уравнения для скорости изменения поврежденности путем интегрирования с учетом следующих условий: при $t = 0$ $\omega = 0$, в момент разрушения образца t_r $\omega = \omega_r = 1$. Таким образом, получим

$$\int_0^{\omega_r} (1-\omega)^\varphi d\omega = \frac{1+m}{[A\sigma_0^\chi(\varphi+1)][1-(1-\omega_r)^{\varphi+1}]^{1/(1+m)}}. \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 25-21-00272).

Белова Оксана Николаевна, к.т.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Oksana Belova (Samara University, Samara, Russia)

Степанова Л.В., д.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Larisa Stepanova (Samara University, Samara, Russia)

Чаплий Дмитрий Викторович, Самарский университет (Самара, Россия); Dmitriy Chapliy (Samara University, Samara, Russia)

Тогда для текущего значения параметра поврежденности ω получим выражение $\omega(t) = 1 - \left(1 - \frac{(\varphi+1)At^{m+1}\sigma_0^x}{1+m}\right)^{1/(1+\varphi)}$. Модель поврежденности, описанная выше, была инкорпорирована в КЭ пакет с использованием пользовательских процедур. Затем проведена серия расчетов с целью определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещиноподобного дефекта. Проведен асимптотический анализ полученных полей напряжений, деформаций и поврежденности. Распределения поврежденности с течением времени приведены на рис. 1. Данные поля построены для трех материалов, имеющие соответственно значения а) $n=3$, б) $n=4$ и в) $n=5$ в двойных логарифмических координатах с целью определения асимптотики.

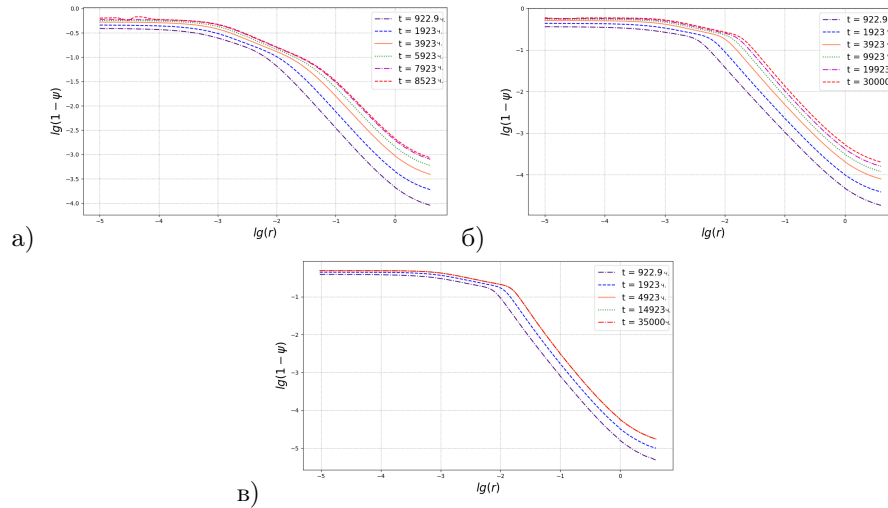


Рис. 1: Распределения поврежденности с течением времени

На рис. 1 видно, что кривые поврежденности с течением времени на некотором расстоянии от вершины трещины начинают содержать прямолинейный участок, что говорит об асимптотическом поведении в этой области. Далее выявлен автомодельный характер распределений напряжений в окрестности вершины трещины. Подробнее о результатах работы можно узнать из следующих работ [1-3].

Литература

1. Чаплий Д.В., Белова О.Н., Степанова Л.В., Быкова Ю.С., Исследование асимптотики поля напряжений в окрестности вершины трещины в условиях ползучести с учетом поврежденности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, **3** (2024), 17–38.
2. Степанова Л.В., Белова О.Н., Чаплий Д.В., Быкова Ю.С., Численное исследование асимптотики поврежденности материала в окрестности фронта трещины при ползучести // Прикладная механика и техническая физика. **4:392** (2025), 169–180.
3. Чаплий Д.В., Степанова Л.В., Белова О.Н., Параметрическое исследование полей, ассоциированных с вершиной трещины, в условиях ползучести с учетом процессов накопления поврежденности с использованием UMAT // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки, **3:27** (2023), 509–529.

НЕПОЛНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГОРЕНИЯ

А.И. Блатов, Е.В. Китаева

blatov-2002@mail.ru, kitaeva.ev@ssau.ru

УДК 517.518

Рассматривается двумерная модель горения с известным законом выгорания. Предложен экономичный численный алгоритм, основанный на методе неполной факторизации. Приводятся результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: метод сопряженных градиентов, предобуславливатель, неполная факторизация, ленточная матрица, полуширина ленты

Рассматривается параболическое уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} = \eta e^{\theta} + \frac{1}{\delta} \Delta \theta,$$

заданное в цилиндре

$$\Omega = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -\infty < z < +\infty\}.$$

Это математическая модель задачи о тепловом взрыве в случае реакции первого порядка с заданным законом выгорания [2], где θ – безразмерная температура, η – безразмерная концентрация, τ – безразмерное время, ε , малый положительный параметр, δ – параметр, характеризующий состояние системы. В зависимости от его величины реакция имеет либо взрывной характер, либо протекает медленно. Значение параметра δ , отделяющее медленные режимы от взрывных, называется критическим. Температуру на стенках цилиндра считаем нулевой.

Введем следующее упрощение, считая, распределения температуры и концентрации одинаковыми в любой плоскости цилиндра, параллельной основанию. Рассмотрим затухающий, стационарно установившейся, режим горения, где концентрация считается заданной функцией $\eta = \eta(x, y)$, Процесс выгорания топлива будем рассматривать в квадрате

$$D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\},$$

с границей Γ . Получим краевую задачу

$$\eta e^{\theta} + \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\theta|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Блатов Артем Игоревич, магистрант, Самарский университет (Самара, Россия); Artem Blatov (Samara University, Samara, Russia)

Китаева Елена Викторовна, к.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Elena Kitaeva (Samara University, Samara, Russia)

Линеаризуя задачу в окрестности искомого решения, получим итерационный процесс

$$\eta e^{\theta^k} + \eta e^{\theta^k} \theta^{k+1} - \eta e^{\theta^k} \theta^k + \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial^2 \theta^{k+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta^{k+1}}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (3)$$

После дискретизации (3) на каждом шаге итерационного процесса требуется решить систему линейных алгебраических уравнений высокого порядка, матрица и правая часть которой формируется на каждой итерации.

Заменим область D сеточной областью

$$\hat{D} = \{(x_i, y_j), x_i = -1 + ih, y_j = -1 + jh, h = 2/N, i, j = 0, \dots, N\},$$

функции $\theta(x, y)$, $\eta(x, y)$ сеточными функциями $\hat{\theta} = \{\theta_{i,j}\}_{i,j=0}^N$, $\theta_{i,j} = \theta(x_i, y_j)$, $\hat{\eta} = \{\eta_{i,j}\}_{i,j=0}^N$, $\eta_{i,j} = \eta(x_i, y_j)$ оператор Лапласа $\Delta \theta$ его разностным аналогом и, подставляя в (3), получим задачу:

$$\begin{aligned} & \eta_{i,j} e^{\theta_{i,j}^k} \theta_{i,j}^{k+1} + \frac{1}{\delta} \frac{\theta_{i-1,j}^{k+1} + \theta_{i+1,j}^{k+1} - 4\theta_{i,j}^{k+1} + \theta_{i,j-1}^{k+1} + \theta_{i,j+1}^{k+1}}{h^2} = \\ & = \eta_{i,j} e^{\theta_{i,j}^k} \theta_{i,j}^k - \eta_{i,j} e^{\theta_{i,j}^k}, i, j = 1, \dots, N-1, \theta_{0,j} = \theta_{N,j} = \theta_{i,0} = \theta_{i,N} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

После выполнения элементарных преобразований запишем (4) в матрично-векторной форме:

$$A\theta = f, \quad (5)$$

где $A = \text{tridiag}\{D_i, E_i, F_i\}$ – блочно-трехдиагональная матрица размерности $(N-1)^2 \times (N-1)^2$. $E_i = \text{tridiag}\{-1, b_j^i, -1\}$ – трехдиагональные матрицы размерности $(N-1) \times (N-1)$, $D_i = F_i = \text{diag}\{-1\}$ – диагональные матрицы размерности $(N-1) \times (N-1)$, $b_j^i = 4 - h^2 \delta \eta_{i,j} e^{\theta_{i,j}^k}$, $i, j = 1, \dots, N-1$.

$$\theta = (\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \dots, \theta_{1,N-1}, \theta_{2,1}, \theta_{2,2}, \dots, \theta_{2,N-1}, \dots, \theta_{N-1,1}, \theta_{N-1,2}, \dots, \theta_{N-1,N-1}),$$

$$f = (f_{1,1}, f_{1,2}, \dots, f_{1,N-1}, f_{2,1}, f_{2,2}, \dots, f_{2,N-1}, \dots, f_{N-1,1}, f_{N-1,2}, \dots, f_{N-1,N-1}) -$$

векторы размерности $(N-1)^2$, $f_{i,j} = h^2 \delta \eta_{i,j} e^{\theta_{i,j}^k} (1 - \theta_{i,j}^k)$, $i, j = 1, \dots, N-1$.

Для решения системы (5) будем использовать предобусловленный метод сопряженных градиентов (ПМСГ) с предобуславливателем $\hat{A}$, который является неполной блочной факторизацией [1] матрицы A :

$$\hat{A} = (D + G)G^{-1}(G + F),$$

где $G = \text{tridiag}\{D_i, G_i, F_i\}$ – блочно-трехдиагональная матрица размерности $(N-1)^2 \times (N-1)^2$, а $(N-1) \times (N-1)$ матрицы G_i определяются по формулам:

$$G_1 = E_1, \quad G_{s+1} = E_{s+1} - D_{s+1} \left(G_s^{-1} \right)^{(p)} F_s, \quad s = 1, 2, \dots, N-2,$$

где символ (p) означает взятие $2p+1$ – диагональной части матрицы, то есть, если $C = \{c_{ij}\}$, то $(C)^{(p)} = \{c_{ij,p}\}$, $c_{ij,p} = c_{ij}$ при $|i-j| \leq p$, $c_{ij,p} = 0$ для $|i-j| > p$.

Результаты численного эксперимента по нахождению температуры топлива для цилиндрического реактора приведены ниже. В таблице используются обозначения: $Dim A$ - количество элементов в строке матрицы A , N - количество элементов в строке блоков матрицы, It_{MSG} - количество итераций метода сопряженных градиентов без предобуславливания, It_{PMSG} - количество итераций метода сопряженных градиентов с предобуславливанием, p - полуширина ленты в предобуславливателе. Производилось сравнение вычислительного алгоритма при использовании различных вариаций метода сопряженных градиентов: без предобуславливания, с предобуславливателями ленточного типа с разной шириной ленты. Наиболее эффективен оказался ПМСГ с предобуславливающей матрицей, полуширина ленты которой определялась по формуле $p = round(N/10)$ (округление до ближайшего целого числа величины $N/10$). Причем при выборе предобуславливателя этого типа с увеличением размерности матрицы количество итераций перестает расти, что говорит о близости спектральных свойств предобуславливающей матрицы и исходной.

Численные расчеты для $\delta = 1,9$, $\eta = 0,5 + x^2 + y^2$

p	$Dim A$	256	1024	4096	16384	65536
	N	16	32	64	128	256
-	It_{MSG}	26	52	101	200	394
$p = 1$	It_{PMSG}	8	12	20	33	60
$p = 5$	It_{PMSG}	4	6	7	10	17
$p = round(N/10)$	It_{PMSG}	7	8	9	9	9

Литература

1. Блатов И.А., Китаева Е.В., Методы неполной факторизации в сочетании с быстрым преобразованием Фурье решения дискретных краевых задач с различными типами краевых условий // Сибирский журнал вычислительной математики, 4:3 (2001), 229–242.
2. Китаева Е.В., Соболев В.А., Численное отыскание ограниченных на всей оси решений дискретных сингулярно возмущенных уравнений и критических режимов горения // Журн. вычисл.матем. и матем. физики, 45:1 (2005), 56–87.

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Н.П. Бондаренко

bondarenkonp@sgu.ru

УДК 517.984

Рассматривается обратная задача для матричного оператора Штурма-Лиувилля, состоящая в восстановлении его коэффициентов по спектральным данным. Приведены теоремы о характеристизации спектральных данных, равномерной ограниченности прямой и обратной задач, а также равномерной устойчивости обратной задачи.

Ключевые слова: спектральный анализ, обратная задача, матричный оператор Штурма-Лиувилля, равномерная устойчивость

Рассмотрим краевую задачу $L = L(Q, h, H)$ для матричного уравнения Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} -Y'' + Q(x)Y &= \lambda Y, \quad x \in (0, \pi), \\ Y'(0) - hY(0) &= 0, \quad Y'(\pi) + HY(\pi) = 0, \end{aligned}$$

где $Y = Y(x)$ — вектор-столбец размера m ($m \geq 1$), $Q(x)$ — комплекснозначная матрица-функция из класса $L_2((0, \pi); \mathbb{C}^{m \times m})$, λ — спектральный параметр, h и H — константные матрицы из $\mathbb{C}^{m \times m}$. Предположим, что

$$Q^*(x) = Q(x) \text{ п.в. на } (0, \pi), \quad h = h^*, \quad H = H^*. \quad (1)$$

Тогда задача L — самосопряженная. Для простоты наложим условие

$$h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi Q(x) dx = 0. \quad (2)$$

Известно (см. [1]), что краевая задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_{nk}\}_J$, $J := \{(n, k) : n \in \mathbb{N}, k = \overline{1, m}\}$, с учетом кратностей обладающих асимптотикой:

$$\sqrt{\lambda_{nk}} = n - 1 + \frac{\varkappa_{nk}}{n}, \quad \{\varkappa_{nk}\} \in l_2, \quad (n, k) \in J. \quad (3)$$

Обозначим через $\{Y_{nk}(x)\}_J$ ортонормированный базис в $L_2((0, \pi); \mathbb{C}^m)$ из собственных функций задачи L . Положим $v_{nk} := Y_{nk}(0)$. Рассмотрим следующую задачу, единственность решения которой следует из результатов [2]:

Обратная задача. По спектральным данным $\{\lambda_{nk}, v_{nk}\}_J$ найти Q , h и H .

Матрицы $V_n = [v_{nk}]_{k=\overline{1, m}}$ ($n \geq 1$) удовлетворяют асимптотическому соотношению

$$V_n^* V_n = \frac{2}{\pi} I_m + \frac{K_n}{n}, \quad \{K_n\} \in l_2(\mathbb{C}^{m \times m}), \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 24-71-10003).

Бондаренко Наталья Павловна, д.ф.-м.н., профессор, Самарский университет (Самара, Россия); Саратовский государственный университет (Саратов, Россия); Natalia Bondarenko (Samara National Research University, Samara, Russia; Saratov State University, Saratov, Russia)

где I_m — единичная матрица.

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество троек (Q, h, H) , удовлетворяющих условиям $Q \in L_2((0, \pi); \mathbb{C}^{m \times m})$, $h, H \in \mathbb{C}^{m \times m}$, (1) и (2).

Обозначим через $\mathcal{S}$ множество последовательностей $\{\lambda_{nk}, v_{nk}\}_J$, таких, что $\lambda_{nk} \in \mathbb{R}$, $\lambda_{n_1 k_1} \leq \lambda_{n_2 k_2}$ при $(n_1, k_1) < (n_2, k_2)$, $v_{nk} \in \mathbb{C}^m$.

Характеризация спектральных данных задачи L дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Для того, чтобы последовательность $\{\lambda_{nk}, v_{nk}\}_J \in \mathcal{S}$ была спектральными данными задачи L с $(Q, h, H) \in \mathcal{P}$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. *Справедливы асимптотические формулы (3) и (4).*
2. *Последовательность $\{v_{nk} \cos(\sqrt{\lambda_{nk}}x)\}_J$ полна в $L_2((0, \pi); \mathbb{C}^m)$.*

Для $R > 0$ обозначим через $\mathcal{P}_R$ множество троек $(Q, h, H) \in \mathcal{P}$, удовлетворяющих условию

$$\|Q\|_{L_2} + \|h\| + \|H\| \leq R.$$

Для $\Omega > 0$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $\mathcal{S}_{\Omega, \varepsilon}$ множество последовательностей $\{\lambda_{nk}, v_{nk}\}_J \in \mathcal{S}$, для которых верны асимптотические формулы (3) и (4) с остаточными членами, удовлетворяющими оценкам

$$\|\{\lambda_{nk}\}\|_{l_2} \leq \Omega, \quad \|\{K_n\}\|_{l_2(\mathbb{C}^{m \times m})} \leq \Omega,$$

кроме того, последовательность $\{v_{nk} \cos(\sqrt{\lambda_{nk}}x)\}_J$ является базисом Рисса в $L_2((0, \pi); \mathbb{C}^m)$ и

$$\forall \{a_{nk}\} \in l_2 \quad \left\| \sum_{n,k} a_{nk} v_{nk} \cos(\sqrt{\lambda_{nk}}x) \right\|_{L_2} \geq \varepsilon \|\{a_{nk}\}\|_{l_2}.$$

Обозначим через S отображение $(Q, h, H) \mapsto \{\lambda_{nk}, v_{nk}\}_J$. Следующая теорема переносит результаты [3] о равномерной ограниченности и устойчивости обратной задачи Штурма-Лиувилля на матричный случай.

Теорема 2.

1. *Прямое спектральное отображение S переводит $\mathcal{P}_R$ в $\mathcal{S}_{\Omega, \varepsilon}$, где Ω и ε зависят только от R .*
2. *Обратное спектральное отображение S^{-1} переводит $\mathcal{S}_{\Omega, \varepsilon}$ в $\mathcal{P}_R$, где R зависит только от Ω и ε .*
3. *Для двух задач L и $\tilde{L}$, спектральные данные которых принадлежат $\mathcal{S}_{\Omega, \varepsilon}$ при некоторых Ω и $\varepsilon > 0$, справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \|Q - \tilde{Q}\|_{L_2} + \|h - \tilde{h}\| + \|H - \tilde{H}\| \leq \\ & \leq C \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \left(n(|\sqrt{\lambda_{nk}} - \sqrt{\tilde{\lambda}_{nk}}| + \|v_{nk} v_{nk}^* - \tilde{v}_{nk} \tilde{v}_{nk}^*\|) \right)^2}, \end{aligned}$$

где константа C зависит только от Ω и ε .

Доказательства теорем 1 и 2 приведены в [4].

Литература

1. *Bondarenko N.*, Spectral analysis for the matrix Sturm-Liouville operator on a finite interval // Tamkang J. Math., **42**:3 (2011), 305–327.
2. *Yurko V.*, Inverse problems for the matrix Sturm-Liouville equation on a finite interval // Inverse Problems, **22** (2006), 1139–1149.
3. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.*, Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // Функци. анализ и его прил., **44**:4 (2010), 34–53.
4. *Bondarenko N.P.*, Uniform stability for the matrix inverse Sturm-Liouville problems, arXiv:2506.15300.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СМАРТ-КОНТРАКТОВ

В.В. Бондаренко, В.Ю. Живцов, Е.О. Манякова

bondarenko.vv@yandex.ru, zhivtsov@samsmu.ru, manikova.liza5@mail.ru

УДК 004.056

В работе рассматриваются методы математического и функционального анализа, применяемые для исследования смарт-контрактов как динамических систем в распределённых вычислительных средах. Показано, что использование формальной модели, графового анализа и агентного подхода позволяет повысить надёжность, предсказуемость и безопасность исполнения программного кода в блокчейн-инфраструктуре.

Ключевые слова: смарт-контракт, блокчейн, математическое моделирование

В целях достижения максимальной скорости и безопасности договорных отношений применяются смарт-контракты на основе блокчейна, в которых могут быть выражены условия и порядок исполнения. Автоматизация действий приводит к сокращению издержек, минимизации рисков мошенничества, связанных с человеческим фактором, и повышению прозрачности [1,2].

Термин «смарт-контракт», предложенный криптографом и учёным Ником Сабо, описывает протокол, с помощью которого стороны фиксируют свои обязательства и контролируют их исполнение с помощью математических алгоритмов.

Широкое распространение концепция получила после появления распределённых реестров, обеспечивших возможность формализовать соглашения в виде исполняемого кода [3]. Программируемые блокчейн-платформы позволили создавать собственные логические конструкции для автоматического контроля обязательств, что привело к появлению большого числа прикладных решений в финансовой, логистической, корпоративной и иных сферах. Масштаб применения увеличивался по мере развития инфраструктуры децентрализованных приложений и отражал не только технологическую зрелость экосистемы, но и устойчивый интерес к инструментам, позволяющим исключить ручное сопровождение сделок.

Функциональная схема смарт-контракта строится на детерминированных правилах, реализуемых через логические операторы, например конструкцию «если—то» [4]. При выполнении указанного условия система автоматически инициирует соответствующее действие, фиксируя его результат в распределённом реестре. Такой механизм устраняет необходимость привлечения посредников и снижает вероятность манипуляций. Программный

Бондаренко Владимир Владимирович, к.ф.м.н, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева (Самара, Россия); Bondarenko Vladimir Vladimirovich (Samara National Research University, Samara, Russia)

Живцов Владимир Юрьевич, к.пед.н., проректор по административной, социальной и воспитательной работе, Самарский государственный медицинский университет (Самара, Россия); Zhivtsov Vladimir Yuryevich (Samara State Medical University, Samara, Russia)

Манякова Елизавета Олеговна, студент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева (Самара, Россия); Manyakova Elizaveta Olegovna (Samara National Research University, Samara, Russia)

код контракта размещается в открытом доступе, что усиливает контроль и обеспечивает верифицируемость, формируя основу доверительных отношений между участниками цифрового взаимодействия.

Несмотря на значительные преимущества, невозможность изменить развернутый код создаёт серьёзные риски. Ошибки в логике или реализации не поддаются исправлению после публикации, и любая неточность становится потенциальным источником критических последствий. Уязвимость в программной конструкции способна привести к полной утрате связанных с ней активов, поскольку сеть зафиксировывает даже вредоносное действие как корректную транзакцию, если оно формально соответствует заданным правилам [5].

Для комплексного изучения смарт-контрактов необходимо учитывать характерные типы уязвимостей [6, 7]. Одним из наиболее известных является повторный вход, при котором злоумышленник вызывает функцию многократно, не дожидаясь завершения предыдущего обращения, и тем самым изменяет состояние системы в обход ожидаемой логики. Значительную угрозу создают ошибки в арифметике, включая переполнения, потерю точности и некорректное округление, так как они нарушают расчёты, связанные с хранением значений или распределением ресурсов. Важными остаются и недостатки контроля доступа, возникающие при отсутствии строгой проверки полномочий для функций, управляющих ключевыми параметрами.

Дополнительные риски связаны с взаимодействием смарт-контрактов с внешними компонентами и ограничениями вычислительной среды. Каждый вызов требует определённого количества операций, совокупность которых формирует конечную стоимость, выражаемую в единицах газа. Отсутствие учёта в архитектуре программы предельного числа вычислительных шагов предоставляет злоумышленнику возможность спровоцировать отказ в обслуживании, намеренно увеличив потребление газа до уровня, при котором корректная работа становится невозможной. Подобные механизмы демонстрируют важность применения методов строгого математического и функционального анализа, позволяющих выявлять скрытые дефекты на этапе проектирования.

По мере роста масштаба и сложности контрактов становится необходимым обращение к внешним источникам данных посредством оракулов, являющимися доверенным шлюзом доступа децентрализованной системы к внешней среде. Зависимость от сторонних информационных потоков повышает вероятность скрытых ошибок, в связи с этим становится обязательным применение методов математического и функционального анализа для уточнения логики переходов между состояниями и оценки корректности вычислений. Формальная верификация рассматривает поведение контракта как систему с чётко определёнными правилами, что даёт возможность описывать её с помощью графа потоков состояний и конечных автоматов, тем самым получая строгую оценку надёжности и предсказуемости исполнения программного кода [8].

Формализация смарт-контрактов как конечных автоматов представляет собой эффективный метод для моделирования поведения, позволяющий точно описать переходы между состояниями в ответ на входные события. Данный способ определяется множеством состояний S , множеством входных сигналов I , функцией переходов $\delta : S \times I \rightarrow S$, функцией выходов

$\lambda : S \rightarrow O$, где O — множество возможных выходных значений, и начальным состоянием $S_0 \in S$:

$$KA[S, I, \delta, \lambda, S_0].$$

В контексте смарт-контрактов состояние отражает текущую конфигурацию контракта (например, балансы, условия исполнения), входной сигнал — событие или транзакцию, функция переходов определяет, как состояние изменяется под влиянием входных данных, функция выходов описывает действия контракта, такие как перевод токенов или изменение переменных. Данное представление позволяет формализовать логику исполнения контракта и его корректность [8].

Методы графового анализа, такие как графы контроля безопасности и потока управления и данных, позволяют выявлять структурные ошибки и уязвимости на этапе проектирования, предотвращая потенциальные сбои. Граф потока управления представляет собой модель программы, представленная в виде ориентированного графа $G_c = (N, E)$, где N — узлы, базовые блоки кода (последовательности инструкций), а E — ребра, возможные переходы между ними, имеют метки, информирующие о том, когда должен произойти переход — описание события. Позволяет анализировать логику программы, находить ошибки (циклы или мертвые пути) и оптимизировать код. Граф потока данных $G_d = (V, D)$ анализирует переменные и их зависимости, выявляя потенциальные угрозы и несоответствия в передаче и обработке информации. Метод наглядно показывает взаимосвязи между пользователями, ресурсами и разграничением доступа.

На этапе исполнения смарт-контракты и связанные с ними программные структуры проявляют свойства автономных агентных вычислительных единиц, реагирующих на изменения среды и обмен сигналами.

Функциональный анализ способствует оценке устойчивости и предсказуемости моделируемой динамической системы, реагирующей на внешние воздействия. Агенты рассматриваются со состояниями $x(t) \in \mathbb{R}^n$, которые описываются дифференциальными или разностными уравнениями:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)),$$

где $u(t)$ — входные воздействия, такие как события или сообщения.

Анализ устойчивости и проверка свойства и условий безопасности, сохраняющихся на всех переходах системы, применяется для оценки стабильности смарт-контрактов и программных агентов.

Проверка выполнения инвариантов позволяет гарантировать отсутствие нежелательных или опасных состояний в процессе исполнения команд.

Для учёта неопределённостей и рисков используются вероятностные конечные автоматы, в которых переходы задаются распределением [9].

Таким образом, комплексный математический подход является фундаментальным для обеспечения надежности и безопасности, корректности и эффективности развития блокчейн-технологий и смарт-контрактов, особенно в высокорискованных областях, связанных с финансами, логистикой и управлением активами [10].

Развитие методов формальной и функциональной верификации напрямую связано с общими тенденциями цифровой трансформации, где данные рассматриваются как ключевой ресурс и определяют эффективность

технологических решений. Исследования, посвящённые экономике данных, подчёркивают, что надёжная инфраструктура обработки и проверки цифровых объектов становится необходимым условием для построения безопасных вычислительных сред, в том числе основанных на смарт-контрактах и автономных системах [11].

В этой же парадигме развивается направление токенизации различных аспектов цифровой деятельности, включая репутационные показатели, которые приобретают форму формализованных и проверяемых сущностей. Свойства неизменяемости, детерминизма и формальной проверяемости, характерные для смарт-контрактов, могут быть использованы также для обеспечения достоверности социально-технических процессов [12]. Включение математических моделей устойчивости и инвариантов в архитектуру подобных систем создаёт предпосылки для формирования новых классов безопасных цифровых механизмов.

Активно развиваются методы автоматического анализа байткода смарт-контрактов, основанные на символьном выполнении и проверке шаблонов уязвимостей. В рамках таких подходов предлагаются инструменты, способные выявлять типичные дефекты логики, связанные с повторным входом, зависимостью от порядка транзакций и ошибками обработки состояний, а также масштабируемые системы формальной проверки контрактов на соответствие заданным свойствам безопасности [13, 14].

Языки программирования с чётко специфицированной операционной семантикой и разделением вычислений и коммуникации, ориентированные на последующую верификацию, демонстрируют, что задание строгой функциональной модели на уровне исходного кода позволяет упростить проверку инвариантов и свойств безопасности, а также уменьшить вероятность появления скрытых уязвимостей [15]. В совокупности эти подходы подтверждают, что дальнейшее развитие блокчейн-экосистем тесно связано с внедрением формальных методов анализа, интегрированных как в инструменты статического контроля, так и в проектирование специализированных языков и агентных архитектур.

Литература

1. Олин Р.А., Смарт-контракты как инструмент автоматизации и оптимизации бизнес-процессов / Олин Р.А., Ермолина Л.В., Портнов К.В. // Экономика и предпринимательство, 10 (183) (2025), — 793–797. — EDN BFQVNO.
2. Олин Р.А., Инновации и управление рисками с использованием NFT / Олин Р.А. // Наука XXI века: актуальные направления развития, 2-2 (2023), — 292–298. — DOI 10.46554/ScienceXXI-2023.09-2.2-pp.292. — EDN YCZSUI.
3. Исследование смарт-контрактов [Электронный ресурс]. — URL: https://ipquorum.ru/upload/issledovanie_smart-kontrakt-hpLuTDmS.pdf (дата обращения: 04.11.2025).
4. Смарт-контракты: суть, виды и особенности использования [Электронный ресурс]. — URL: <https://adpass.ru/chto-takoe-smart-kontrakt/> (дата обращения: 04.11.2025).
5. Комплексное руководство по аудиту смарт-контрактов [Электронный ресурс]. — URL: <https://scand.com/ru/company/blog/kompleksnoe-rukovodstvo-po-audit-smart-kontraktov/> (дата обращения: 06.11.2025).
6. Бондаренко В.В. Методы обеспечения безопасности данных в распределённых системах искусственного интеллекта / Бондаренко В.В., Олин Р.А. / Актуальные проблемы радиоэлектроники и телекоммуникаций: Материалы Всероссийской научно-технической конференции, Самара, 20–23 мая 2025 года. — Самара:

ООО «АРТЕЛЬ», 2025. — 198–200. — EDN ITHYTA.

7. *Бондаренко В.В.* Анализ эффективности реализации алгоритмов хеширования в оптических вычислителях / Бондаренко В.В., Олин Р.А., Волохович М.А. // Актуальные проблемы радиоэлектроники и телекоммуникаций: Материалы Всероссийской научно-технической конференции, Самара, 20–23 мая 2025 года. — Самара: ООО «АРТЕЛЬ», 2025. — 201–203. — EDN OBJNSK.

8. Формальная верификация смарт-контрактов [Электронный ресурс]. — URL: <https://habr.com/ru/articles/705148/> (дата обращения: 06.11.2025).

9. Конечный автомат: теория и реализация [Электронный ресурс]. — URL: <https://tproger.ru/translations/finite-state-machines-theory-and-implementation> (дата обращения: 04.11.2025).

10. *Шшишкин Е.С.*, Проверка функциональных свойств смарт-контрактов методом символьной верификации модели // Труды ИСП РАН, **30:5** (2018), 265–288. — DOI: 10.15514/ISPRAS-2018-30(5)-16.

11. *Олин Р.А.*, Экономика данных как движущая сила цифровой трансформации / Олин Р.А. // Наука XXI века: актуальные направления развития, 2-2 (2025), 169–174. — EDN EHNQHU.

12. *Портнов К.В.* Токенизация репутации / Портнов К.В., Олин Р.А., Живцов В.Ю. // Экономика и предпринимательство, 11(184) (2025), 715–719.

13. *Luu L., Chu D.-H., Olickel H., Saxena P., Hobor A.* Making Smart Contracts Smarter // Proceedings of the 2016 ACM SIGSAC Conference on Computer and Communications Security (CCS'16). — New York: Association for Computing Machinery, 2016. — 254–269. — DOI 10.1145/2976749.2978309.

14. *Tsankov P., Dan A., Drachsler-Cohen D., Gervais A., Bünzli F., Vechev M.*, Securify: Practical Security Analysis of Smart Contracts // Proceedings of the 2018 ACM SIGSAC Conference on Computer and Communications Security (CCS'18). — New York: Association for Computing Machinery, 2018. — 67–82. — DOI 10.1145/3243734.3243780.

15. *Sergey I., Nagaraj V., Johannsen J., Kumar A., Trunov A., Chan K.G.*, Safer Smart Contract Programming with Scilla // Proceedings of the ACM on Programming Languages, **3**, OOPSLA (2019), art. no. 185, 1–30. — DOI 10.1145/3360611.

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА СОБЫТИЙНОЙ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ МОДЕЛИ ЖЕСТКИХ СФЕР

К.А. Буланова, С.А. Лычев, Л.В. Степанова

rin.bulanova@yandex.ru, lycheva@mail.ru, stepanova.lv@ssau.ru

УДК 519.6

В работе представлена реализация алгоритма событийной молекулярной динамики (Event-Driven Molecular Dynamics, EDMD) для модели жёстких сфер. Цель исследования – разработка высокопроизводительного вычислительного инструмента и сравнительный анализ эффективности различных стратегий оптимизации, включая клеточные списки и приоритетные очереди. Реализованный на C++ алгоритм моделирует эволюцию системы на основе дискретных событий без использования численного интегрирования уравнений движения, что в сочетании с применёнными оптимизациями позволяет существенно увеличить скорость моделирования.

Ключевые слова: молекулярная динамика, событийная молекулярная динамика, модель жёстких сфер, упругие столкновения

Молекулярная динамика (МД) является вычислительным методом для исследования эволюции классических многочастичных систем. Однако традиционная МД, основанная на численном интегрировании уравнений движения с фиксированным временным шагом, оказывается неэффективной для систем, предполагающих редкие, но существенные события.

Для моделирования систем частиц, взаимодействие которых описывается потенциалом жёстких сфер:

$$V(r_{ij}) = \begin{cases} \infty, & r_{ij} < \sigma, \\ 0, & r_{ij} \geq \sigma, \end{cases} \quad (1)$$

где $r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ – расстояние между центрами частиц, σ – эффективный диаметр взаимодействия частиц, применяется событийная молекулярная динамика [1,2], в которой эволюция системы рассчитывается аналитически между дискретными событиями.

Момент столкновения двух частиц i и j определяется из условия касания:

$$|\Delta \mathbf{r}_{ij} + \Delta \mathbf{v}_{ij} t|^2 = \sigma^2, \quad (2)$$

где $\Delta \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$, $\Delta \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i$. Положительный корень t_{ij} этого уравнения соответствует времени до столкновения. Из всех рассчитанных значений $\{t_{ij}\}$ выбирается минимум $t_{\min}$, определяющий следующий шаг эволюции системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 25-11-00333).

Буланова Карина Артемовна, аспирант, Самарский университет (Самара, Россия); Karina Bulanova (Samara University, Samara, Russia)

Лычев Сергей Александрович, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (Москва, Россия); Sergey Lychev (Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)

Степанова Лариса Валентиновна, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой математического моделирования в механике, Самарский университет (Самара, Россия); Larisa Stepanova (Samara University, Samara, Russia)

Алгоритм EDMD реализует следующую последовательность действий:

1. С использованием клеточных списков (cell-lists) находятся все пары частиц в пределах зоны взаимодействия и вычисляются прогнозируемые времена их возможных столкновений. Рассчитанные события заносятся в приоритетную очередь (min-heap) [3].

2. Из очереди извлекается событие с минимальным временем $t_{\min}$. Система переходит в новое состояние:

$$\mathbf{r}_i(t + t_{\min}) = \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{v}_i(t) t_{\min}. \quad (3)$$

3. Для участвующих в столкновении частиц пересчитываются скорости согласно законам сохранения импульса и энергии:

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - (\Delta \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad (4)$$

$$\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j + (\Delta \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad (5)$$

где $\mathbf{n} = \Delta \mathbf{r}_{ij} / |\Delta \mathbf{r}_{ij}|$ – единичный вектор вдоль линии центров в момент соударения.

4. Удаляются устаревшие события, связанные с изменившимися скоростью частицами, и вычисляются новые времена для их возможных столкновений.

5. Процесс повторяется, начиная с шага 2, обеспечивая дискретную эволюцию системы во времени.

Для наглядного отображения динамики можно ввести вспомогательный шаг Δt и сохранять промежуточные состояния системы для последующей визуализации в OVITO, что позволяет наблюдать процесс столкновений (Рис. 1).

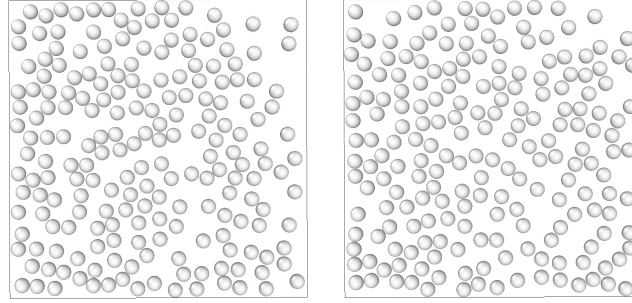


Рис. 1: Визуализация системы жёстких сфер в OVITO.
Последовательность упругих столкновений частиц.

Разработанный инструмент позволяет эффективно моделировать крупные системы жёстких сфер и может быть использован для исследования их статистических свойств и релаксационных процессов.

Литература

1. Alder B.J., Wainwright T.E., Phase transition for a hard sphere system // Journal of Chemical Physics, **27**:5 (1957), 1208–1209. — DOI: 10.1063/1.1743957.
2. Alder B.J., Wainwright T.E., Studies in Molecular Dynamics. I. General Method // Journal of Chemical Physics, **31**:2 (1959), 459–466. — DOI: 10.1063/1.1730376.
3. Smullenburg F., Efficient event-driven simulations of hard spheres // The European Physical Journal E, 45 (2022), art. no. 22. — DOI: 10.1140/epje/s10189-022-00180-8.

ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

О.В. Видилина

vidilina.ov@ssau.ru

УДК 517.977

Рассматривается задача оптимального быстрогодействия для линейной системы дифференциальных уравнение с двумя малыми параметрами при производных. Описан метод декомпозиции системы и найдено асимптотическое разложение моментов переключения оптимального управления и оптимального времени перехода системы из заданного начального положение в начало координат по степеням малых параметров.

Ключевые слова: оптимальное управление, асимптотическое разложение, декомпозиция сингулярно возмущенных систем.

Рассмотрим задачу оптимального быстрогодействия для линейной системы следующего вида:

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + b_1u,$$

$$\varepsilon\dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + b_2u,$$

$$\mu\varepsilon\dot{z} = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + b_3u,$$

где $x, y, z \in R$, $A_{ij} = A_{ij}(t, \varepsilon, \mu)$, $b_i = b_i(t, \varepsilon, \mu)$, $t \in R$, $|u| = 1$, — оптимальное управление, переводящее систему из начального положения в начало координат за минимальное время, ε и μ — положительные малые параметры.

Будем предполагать, что функции b_i , A_{ij} , $(A_{33}(t, 0, 0))^{-1}$, $i, j = 1, 2, 3$, обладают достаточным числом непрерывных и ограниченных частных производных по всем аргументам при $t \in R$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\mu \in (0, \mu_0]$.

Проведем декомпозицию данной системы на три подсистемы меньшей размерности. Расщепление будем производить в два этапа. На первом этапе при помощи замены переменных

$$x = p_0 + \varepsilon\mu H_1(t, \varepsilon, \mu)w, \quad y = v_0 + \mu H_2(t, \varepsilon, \mu)w,$$

$$z = w + L_1(t, \varepsilon, \mu)x + L_2(t, \varepsilon, \mu)y$$

система преобразуется к виду

$$\dot{p}_0 = (A_{11} + A_{13}L_1)p_0 + (A_{12} + A_{13}L_2)v_0 + (b_1 - H_1B_3)u,$$

$$\varepsilon\dot{v}_0 = (A_{21} + A_{23}L_1)p_0 + (A_{22} + A_{23}L_2)v_0 + (b_2 - H_2B_3)u,$$

$$\varepsilon\mu\dot{w} = D_3w + (B_3)u,$$

где $D_3 = A_{33} - \varepsilon\mu L_1A_{13} - \mu L_2A_{23}$, $B_3 = b_3 - \varepsilon\mu L_1b_1 - \mu L_2b_2$.

Исследование выполнено за счет средств государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, шифр проекта FSSS-2026-0009.

Видилина Ольга Викторовна, к.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Olga Vidilina (Samara University, Samara, Russia)

Функции $L_i, H_i, i = 1, 2$ могут быть найдены в виде асимптотических разложений

$$L_i(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{k,j \geq 0} \varepsilon^k \mu^j L_i^{(k,j)}(t), \quad H_i(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{k,j \geq 0} \varepsilon^k \mu^j H_i^{(k,j)}(t),$$

из уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \mu \dot{L}_i + \varepsilon \mu L_1(A_{1i} + A_{13}L_1) + \mu L_2(A_{2i} + A_{23}L_2) &= A_{3i} + A_{33}L_i, \\ \varepsilon \mu \dot{H}_i + H_i D_3 &= \varepsilon \mu (A_{i1} + A_{i3}L_1)H_1 + \mu (A_{i2} + A_{i3}L_2)H_2 + A_{i3}. \end{aligned}$$

Перейдем ко второму этапу расщепления. К системе, полученной после первого преобразования применим замену переменных

$$\begin{aligned} p_0 &= p + \varepsilon H(t, \varepsilon, \mu)v, \\ v_0 &= v + L(t, \varepsilon, \mu)p_0. \end{aligned}$$

Получим следующую блочно-диагональную систему:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= D_1 p + B_1 u, \\ \varepsilon \dot{v} &= D_2 v + B_2 u, \\ \varepsilon \mu \dot{w} &= D_3 w_{B_3} u, \end{aligned}$$

где $D_1 = (A_{11} + A_{13}L_1) + (A_{12} + A_{13}L_2)L$, $D_2 = (A_{22} + A_{23}L_2) - \varepsilon L(A_{12} + A_{13}L_2)$, $B_1 = b_1 - H_1 B_3 - H B_2$, $B_2 = b_2 - H_2 B_3 - \varepsilon L(b_1 - H_1 B_3)$, и выполняются равенства:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{L} + \varepsilon L D_1 &= (A_{21} + A_{23}L_1) + (A_{22} + A_{23}L_2)L, \\ \varepsilon \dot{H} + H D_2 &= \varepsilon D_1 H + (A_{12} + A_{13}L_2). \end{aligned}$$

Для полученной системы построено асимптотическое разложение по степеням малых параметров для моментов переключения оптимального управления t_1, t_2 и оптимального времени перехода системы из начального положение в начало координат t_3 с учетом того, что:

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0^1 + \delta_1(\varepsilon, \mu), \quad \delta(0, 0) = 0, \\ t_2 &= t_0^1 + \varepsilon \delta_2(\varepsilon, \mu), \\ t_3 &= t_0^1 + \varepsilon \mu \delta_3(\varepsilon, \mu), \end{aligned}$$

где $\delta_k(\varepsilon, \mu) = \sum_{i,j \geq 0} \varepsilon^i \mu^j t_{(i,j)}^k$.

Литература

1. *Калинин А.И.* Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. — Минск: Экоперспектива, 2000.
2. *Видилина О.В.*, Декомпозиция задач оптимального быстрогодействия с сингулярными возмущениями // Мехатроника, автоматизация, управление, **8** (2004), 16–23.
3. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ФУНКЦИЙ С НЕКОТОРЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.В. Волчков, С.А. Руссиян

volna936@gmail.com

УДК 517.518

В работе изучаются свойства функций, удовлетворяющих обобщенному условию периодичности в среднем. Показано, что при некоторых дополнительных требованиях такие функции однозначно определяются своим ограничением на подходящую область.

Ключевые слова: сферические средние, уравнения свёртки, теоремы единственности

Хорошо известно (см., например, [1, гл. 5]), что периодические в среднем функции относительно свёртывателя T на $\mathbb{R}^1$ определяются своими значениями вблизи выпуклой оболочки носителя T . Аналогичный результат справедлив и в кратном случае при условии радиальности T (см. [2, гл. 6], [3, § 3], [4, гл. 14]). Здесь изучаются подобные вопросы для функций, удовлетворяющих обобщенному условию периодичности в среднем.

Пусть $\mathbb{C}^n$ — n -мерное комплексное пространство, $\langle z, w \rangle$ — эрмитово скалярное произведение векторов $z, w \in \mathbb{C}^n$, $|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ — длина вектора $z \in \mathbb{C}^n$, dm — мера Лебега в $\mathbb{C}^n$. Для $\rho > 0$ положим $B_\rho = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < \rho\}$, $S_\rho = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = \rho\}$, $\bar{B}_\rho = B_\rho \cup S_\rho$. Обозначим через $\mathbb{S}^1$ единичную окружность с центром в нуле на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < r < R \leq +\infty$, T — радиальная непрерывная в $\bar{B}_r$ функция, носитель которой содержит S_r . Предположим, что функция $f \in C^\infty(B_R \times \mathbb{S}^1)$ удовлетворяет следующим условиям:

- (i) $f = 0$ на $B_r \times \mathbb{S}^1$;
- (ii) при $(z, \tau) \in B_{R-r} \times \mathbb{S}^1$ справедливо равенство

$$\int_{B_r} f(z - w, \tau e^{ih(z, w)}) T(w) e^{i\lambda \operatorname{Im} \langle z, w \rangle} dm(w) = 0, \quad (1)$$

где функция $h : B_{R-r} \times \bar{B}_r \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид $h(z, w) = \chi(z - w) + \psi(w) + \varphi(z)$, $\chi \in C^\infty(B_R)$, ψ — радиальная непрерывная функция на $\bar{B}_r$.

Тогда $f \equiv 0$ в $B_R \times \mathbb{S}^1$.

Отметим, что уравнения типа (1) появляются естественным образом при изучении уравнений свёртки на группах Гейзенберга (см. [4, гл. 17]). Далее, гладкость функции f в теореме 1, вообще говоря, понизить нельзя. Кроме того, утверждение теоремы 1 становится неверным, если в условии (i) заменить r на произвольное число $r' \in (0, r)$. Отметим также, что теорема 1 обобщает соответствующий результат М.Л. Аграновского и Е.К. Нараяна [5], где рассматривался случай $f(z, \tau) = F(|z|)$, $T \equiv 1$.

Волчков Артём Витальевич, студент, Донецкий национальный технический университет (Донецк, Россия); Artem Volchkov (Donetsk National Technical University, Donetsk, Russia)

Руссиян Станислав Анатольевич, к.т.н., доцент, Донецкий национальный технический университет (Донецк, Россия); Stanislav Russiyan (Donetsk National Technical University, Donetsk, Russia)

Литература

1. *Леонтьев А.Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. — Москва: Наука, 1980. — 384 с.
2. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. — Москва: ИЛ, 1958. — 158 с.
3. *Smith J.D.*, Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Philos. Soc., **72** (1972), 403–416.
4. *Volchkov V.V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. — Springer-Verlag London Limited, 2009.
5. *Agranovsky M.L., Narayanan E.K.*, A local two radii theorem for the twisted spherical means on $\mathbb{C}^n$ // Contemp. Math., **382** (2005), 13–27.

ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ-РЕАКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БЕЗУСЛОВНО ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Д.В. Галушкина, А.Н. Кувшинова
dgalushkina73@gmail.com, kuvanulspu@yandex.ru

УДК 681.5.015.4, 004.94

В работе рассмотрена одномерная модель конвекции-диффузии-реакции с граничными условиями первого рода. Предложена новая дискретная линейная модель в пространстве состояний, полученная дискретизацией исходной непрерывной модели на основе безусловно положительной конечно-разностной схемы.

Ключевые слова: математическое моделирование, уравнение конвекции-диффузии-реакции, дискретная линейная стохастическая система, конечно-разностная схема

Математические модели конвекции-диффузии-реакции широко применяются при описании физико-химических, биологических и экологических процессов как природного, так и антропогенного происхождения [1]. В рамках таких моделей решение задачи определяется заданием совокупности параметров. В реальных прикладных задачах часть параметров может быть неизвестна или задана приблизительно и их необходимо определить или уточнить.

Рассмотрим одномерную модель конвекции-диффузии-реакции, описываемую уравнением (1) с начальным условием (2) и граничными условиями первого рода (3):

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial c(x, t)}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} = -\beta c(x, t), \quad (1)$$

$$c(x, 0) = \varphi(x). \quad (2)$$

$$\begin{cases} c(a, t) = f(t), \\ c(b, t) = g(t). \end{cases} \quad (3)$$

$$x \in [a; b], t \in [0; T]$$

Работа выполнена в рамках Дополнительного соглашения № 073-03-2025-066/1 от 19.03.2025 г. к Соглашению о предоставлении субсидии из Федерального бюджета на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) № 073-03-2025-066 от 16.01.2025 г., заключенного между ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова» и Министерством просвещения Российской Федерации.

Галушкина Дарья Валерьевна, ассистент кафедры информационных технологий ФМИАТ УлГУ, Ульяновский государственный университет (Ульяновск, Россия); Galushkina Darya (Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia)

Кувшинова Анастасия Николаевна, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова (Ульяновск, Россия); Kuvshinova Anastasia (Ulyanovsk State University of Education, Ulyanovsk, Russia)

где $c(x, t)$ — искомая функция, x — пространственная координата, t — время, α — коэффициент диффузии, v — коэффициент конвекции, β — коэффициент реакции, $\varphi(x)$, $f(x)$ и $g(x)$ — заданные функции, a и b — границы рассматриваемой области (отрезка).

Для решения поставленной задачи перейдем от непрерывной модели (1)–(3) к дискретной линейной стохастической системе в пространстве состояний, где первым уравнением запишем уравнение состояния объекта, а вторым запишем уравнение измерений:

$$\begin{cases} c_k &= F_{k-1}c_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1}, \\ z_k &= H_k c_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{cases}$$

где $c_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u_k \in \mathbb{R}^r$ — вектор входных воздействий (управления), $z_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений, $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ — шум в измерителе.

Дискретизацию непрерывной модели можно осуществлять различными методами. Например, в работе [2] для одномерной модели реакции-диффузии переход к дискретной линейной системе был выполнен на основе явной трехточечной конечно-разностной схемы. В работе [3] дискретизация одномерной модели диффузии была осуществлена на основе конечно-разностной схемы четвертого порядка точности по пространственной переменной. Но, следует отметить, что общепринятые численные схемы, такие как метод конечных разностей, могут давать отрицательные значения искомой функции, что может привести к неустойчивости. В работе [4] описана новая разностная схема, которая гарантирует положительность решения и может быть применима для диффузионных задач.

Зададим равномерную пространственно-временную сетку $\{(x_i, t_k) | i = 0, 1, \dots, N, k = 1, 2, \dots, K\}$, где

$$x_i = a + i\Delta x, t_k = k\Delta t, \quad \Delta x = \frac{b-a}{N}, \Delta t = \frac{T}{K}.$$

Положим: $c_i^k = c(x_i, t_k)$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $f^k = f(t_k)$, $g^k = g(t_k)$.

Согласно [4] безусловно положительная разностная схема будет иметь вид:

$$\frac{c_i^k - c_i^{k-1}}{\Delta t} + v \frac{c_i^k - c_{i-1}^{k-1}}{\Delta x} - \alpha \frac{c_{i+1}^{k-1} - 2c_i^k + c_{i-1}^{k-1}}{\Delta x^2} = -\beta c_i^k, \quad (4)$$

где $i = 1, 2, \dots, N-1$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Отметим, что в системе (4) все слагаемые, соответствующие узлу i , соответствуют значению функции на k -ом временном слое.

Выразим из уравнения (4) c_i^k :

$$c_i^k - c_i^{k-1} + v\Delta t \frac{c_i^k - c_{i-1}^{k-1}}{\Delta x} - \alpha\Delta t \frac{c_{i+1}^{k-1} - 2c_i^k + c_{i-1}^{k-1}}{\Delta x^2} = -\beta\Delta t c_i^k, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} c_i^k \left(1 + \frac{v\Delta t}{\Delta x} + 2\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} + \beta\Delta t \right) + c_{i-1}^{k-1} \left(-\frac{v\Delta t}{\Delta x} - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \right) - \\ - c_{i+1}^{k-1} + c_{i+1}^{k-1} \left(-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем обозначения:

$$a_1 = \frac{\frac{v}{\Delta x} + \frac{\alpha}{\Delta x^2}}{\frac{1}{\Delta t} + \frac{v}{\Delta x} + \frac{2\alpha}{\Delta x^2} + \beta}, a_2 = \frac{\frac{1}{\Delta t}}{\frac{1}{\Delta t} + \frac{v}{\Delta x} + \frac{2\alpha}{\Delta x^2} + \beta},$$

$$a_3 = \frac{\frac{\alpha}{\Delta x^2}}{\frac{1}{\Delta t} + \frac{v}{\Delta x} + \frac{2\alpha}{\Delta x^2} + \beta}.$$

Получим:

$$c_i^k = a_1 c_{i-1}^{k-1} + a_2 c_i^{k-1} + a_3 c_{i+1}^{k-1} \quad (7)$$

Тогда для начального условия (2): $c_i^0 = \varphi(x_i), i = 1, 2, \dots, N-1$.

Дискретизируя граничные условия системы (4), получим $c_0^{k-1} = f^{k-1}$, $c_N^{k-1} = g^{k-1}$.

Для $i = 1$ получим:

$$c_1^k = a_1 c_0^{k-1} + a_2 c_1^{k-1} + a_3 c_2^{k-1} = a_1 f^{k-1} + a_2 c_1^{k-1} + a_3 c_2^{k-1}.$$

Для $i = N-1$ получим:

$$c_{N-1}^k = a_1 c_{N-2}^{k-1} + a_2 c_{N-1}^{k-1} + a_3 c_N^{k-1} = a_1 c_{N-2}^{k-1} + a_2 c_{N-1}^{k-1} + a_3 g^{k-1}.$$

Искомая дискретная линейная система для модели (1)–(3) может быть записана в следующем виде:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ \vdots \\ c_{N-3}^k \\ c_{N-2}^k \\ c_{N-1}^k \end{bmatrix}}_{c_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}}_{F_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ \vdots \\ c_{N-3}^{k-1} \\ c_{N-2}^{k-1} \\ c_{N-1}^{k-1} \end{bmatrix}}_{c_{k-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}}_{B_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} f^{k-1} \\ g^{k-1} \end{bmatrix}}_{u_{k-1}}, \quad (8)$$

$$k = 1, 2, \dots, K.$$

К уравнению объекта добавим уравнение зашумленных измерений

$$z_k = H_k c_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (9)$$

В полученной системе компоненты вектора состояния c_k соответствуют всем внутренним узлам пространственной сетки, а вектор входных воздействий u_k является двухмерным.

Построенная система может быть использована для решения задач параметрической идентификации методами рекуррентной дискретной фильтрации.

Литература

1. Фарлоу С.Д. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С.Д. Фарлоу. — М. : Мир, 1985. — 383 р.
2. Галушкина Д.В. Численная идентификация граничных условий в модели реакции-диффузии / Д.В. Галушкина, А.Н. Кувшинова, Ю.В. Цыганова // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2023): сборник трудов по материалам IX Международной конференции и молодежной школы (г. Самара, 17–23 апреля 2023 г.). — Т. 5. Науки о данных. — Самара: Издательство Самарского университета, 2023. — 050322.
3. Галушкина Д.В., Кувшинова А.Н., Построение дискретной модели уравнения диффузии в пространстве состояний на основе конечно-разностной схемы четвертого порядка // Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. УлГУ. Электрон. журн., **2** (2024), 20–28.
4. *Chen-Charpentier Benito M., Kojouharov Hristo V.*, An unconditionally positivity preserving scheme for advection-diffusion reaction equations // Mathematical and Computer Modelling, **57** (2013), 2177–2185.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ: СРАВНЕНИЕ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ РЕШЕНИЯМИ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

А. Гацко, Л. В. Степанова

gacko.a@ssau.ru, stepanova.lv@ssau.ru

УДК 517.518

Методом молекулярной динамики исследовано напряженно-деформированное состояние у вершины трещины в медной пластине. Моделирование одноосного растяжения выполнено в LAMMPS при температуре 0.1 К для выделения упругой стадии деформирования. Выявлено качественное согласие с решением Уильямса, однако вместо сингулярности показан предел прочности материала. Результаты демонстрируют необходимость учета атомистических эффектов при описании механики разрушения в наномасштабе.

Ключевые слова: механика разрушения, решения Уильямса, метод молекулярной динамики

В настоящее время в механике разрушения особый интерес представляют вопросы построения многомасштабных, гибридных моделей, сочетающих нано- и макроскопические подходы для описания напряженно-деформированного состояния в образцах с трещиной [1]-[3].

Метод молекулярной динамики - это мощный вычислительный инструмент, который позволяет моделировать поведение атомов и молекул в заданных системах. Он находит применение в механике деформируемого твердого тела для расчета параметров разрушения, анализа зарождения и роста трещин, а также изучения пластической деформации в зоне их вершины, что зачастую исключает необходимость в сложных натурных экспериментах.

Моделирование методом молекулярной динамики было реализовано в программном комплексе LAMMPS [6]. Разработан алгоритм, реализующий одноосное растяжение пластины с центральным вырезом, размеры которой $361.5\text{\AA} \times 361.5\text{\AA} \times 361.5\text{\AA}$, а вырез длиной $36.15\text{\AA}$ моделировался путем исключения межатомных взаимодействий между двумя заранее определенными группами атомов. Для задания межатомных взаимодействий был выбран потенциал погруженного атома для ГЦК-меди. С целью минимизации граничных эффектов в модели использовались периодические граничные условия. Для получения равновесной конфигурации был проведен процесс минимизации энергии системы. Температура моделирования поддерживалась на уровне 0.1 К с помощью NVT ансамбля для дальнейшего сравнения с классическими решениями механики разрушения.

Низкая температура 0.1 К позволила ограничить развитие пластичности и поддерживать упругое поведение материала для корректного сравнения с решением Уильямса в рамках линейной механики разрушения [5].

В ходе обработки численного эксперимента методом молекулярной динамики в программном комплексе OVITO [7] создавался контур в виде кольца

Гацко Анна, Самарский университет (Самара, Россия)

Степанова Лариса Валентиновна, д.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия)

с центром в вершине трещины, после чего формировался новый выходной файл с координатами атомов и значениями компонент тензора напряжений в выделенной области. Данная методика обеспечила возможность детального анализа напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины и позволила построить угловые и радиальные распределения напряжений вблизи окрестности трещины. Так же программный комплекс позволяет получать распределения компонент тензора напряжений на разных промежутках времени:

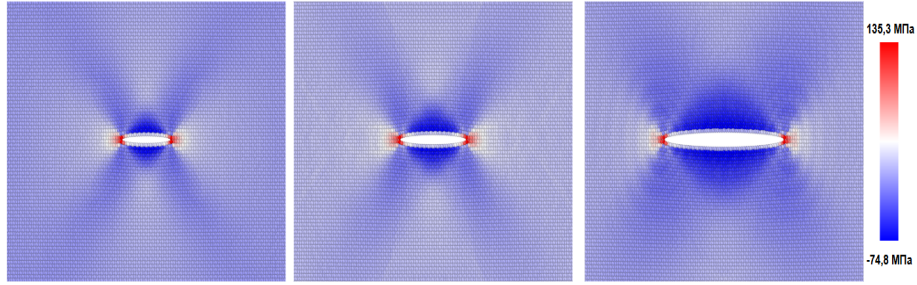


Рис. 1: Распределение компоненты σ_{11} на 80, 120 и 150 пс

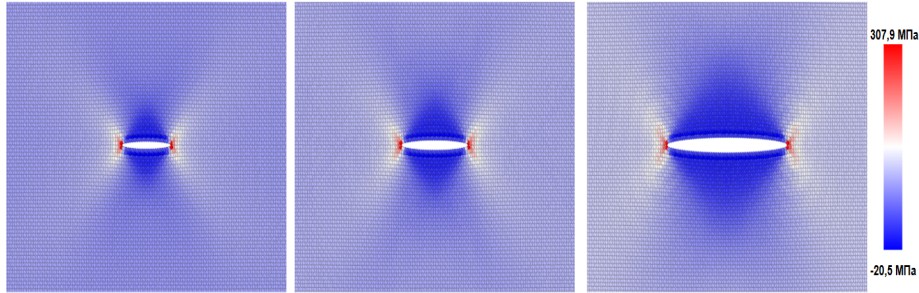


Рис. 2: Распределение компоненты σ_{22} на 80, 120 и 150 пс

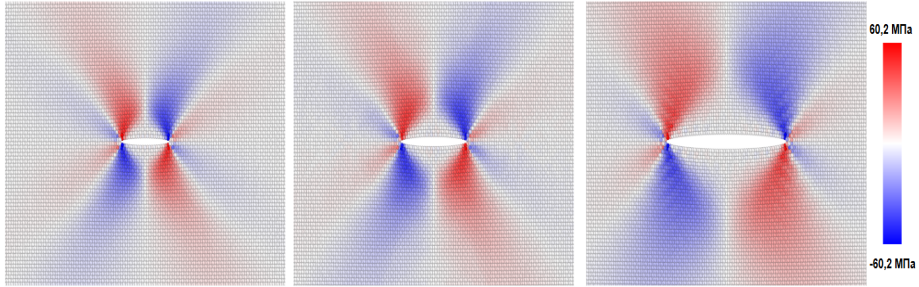


Рис. 3: Распределение компоненты σ_{12} на 80, 120 и 150 пс

Для временных интервалов, соответствующих упругой стадии деформирования, были построены угловые распределения компонент тензора на-

пряжений в сравнении с решением Уильямса [4].

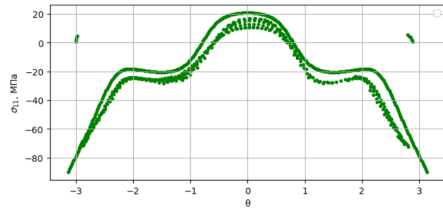


Рис. 4: Распределение σ_{11} на 150 пс

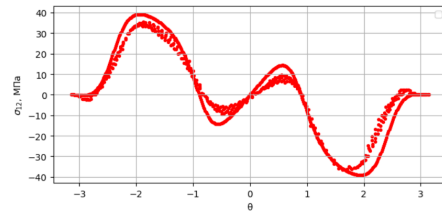


Рис. 5: Распределение σ_{12} на 150 пс

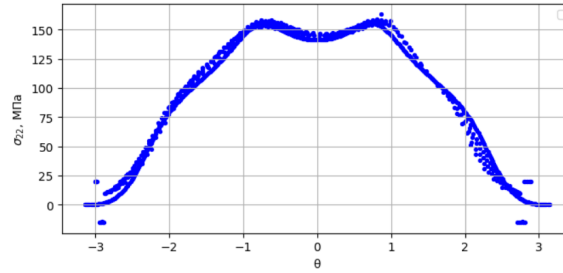


Рис. 6: Распределение σ_{22} на 150 пс

Результаты демонстрируют качественную картину в линейной области. При выборе ранних временных интервалов для анализа наложения не наблюдается в связи с недостаточным размером кольцевой области для выборки данных и незавершенностью процессов релаксации системы. Выбор временных интервалов для анализа свыше 150 пс становится нецелесообразным в связи с развивающимися процессами макроскопического разрушения материала.

Радиальное поведение напряжений в классическом решении Уильямса определяется фундаментальными свойствами уравнений теории упругости. Главной особенностью является сингулярность типа $1/\sqrt{r}$, возникающая как следствие решение бигармонического уравнения.

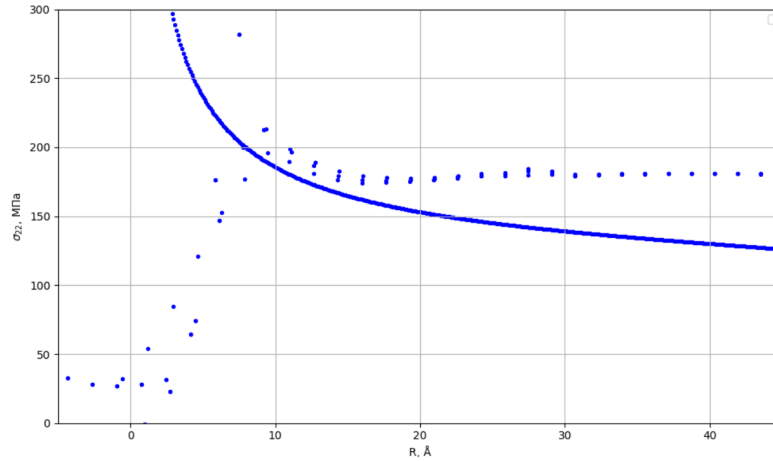


Рис. 7:

Радиальное распределение компоненты напряжения σ_{22}

На представленном графике показано радиальное распределение компо-

ненты тензора напряжений σ_{22} как функции от r при заданном значении полярного угла $\theta = 0$ на продолжении трещины. Сплошной линией показано классическое решение линейной механики разрушения, которое определяет сингулярность напряжений у вершины трещины.

Сравнение с классической теорией механики разрушения выявляет принципиальное различие: в то время как линейная механика разрушения предсказывает сингулярный рост напряжений у вершины трещины, молекулярно-динамическое моделирование демонстрирует физически обоснованное ограниченное поведение напряжений с достижением максимального предела прочности (для меди — 220-270 МПа) и последующим резким спадом. Особенно показательно расхождение в малой окрестности вершины трещины, где атомистическая природа материала принципиально меняет картину напряжённого состояния. На больших расстояниях наблюдается полное согласие с классическим решением Уильямса, что подчёркивает комплементарность подходов: континуальное решение описывает макроскопическое поле напряжений, тогда как атомистическое раскрывает тонкие эффекты в атомарном масштабе, обусловленные дискретностью структуры и нелинейностью межатомных взаимодействий.

Эти результаты демонстрируют, что традиционные континуальные подходы требуют модификации для корректного описания напряженно-деформированного состояния в наномасштабной окрестности вершины трещины, где доминирующую роль играют дискретные атомистические процессы.

Литература

1. Мушанкова К.А., Степанова Л.В., Определение коэффициентов асимптотического ряда для полей напряжений на основе молекулярно-динамических вычислений // Прикладная механика и техническая физика, 2(390) (2025), 196–212. — DOI 10.15372/PMTF202415537.
2. Степанова Л.В., Мушанкова К.А., Атомистическое и континуальное определение полей напряжений у вершины трещины в анизотропных средах с кубической сингонией // Проблемы прочности и пластичности, **86**:1 (2024), 15–25. — DOI 10.32326/1814-9146-2024-86-1-15-25.
3. Белова О.Н., Степанова Л.В., Моделирование распространения и анализ траектории наклонной трещины в трубе с помощью расширенного метода конечных элементов и метода молекулярной динамики // Проблемы прочности и пластичности, **85**:4, 491–499. — DOI 10.32326/1814-9146-2023-85-4-491-499.
4. Williams M.L., On the stress distribution at the base of a stationary crack // Journal of Applied Mechanics, **24** (2023), 109–114.
5. Хеллан К. Введение в механику разрушения. Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. ISBN 5-03-000157-3.
6. Руководство по использованию пакета LAMMPS [Электронный ресурс]. — URL: <https://lammps.sandia.gov/doc/Manual.html>.
7. Руководство по использованию OVITO [Электронный ресурс]. — URL: <https://ovito.org/manual/>.

ОБ ОБРАТНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ДИСКРЕТНО-НЕОДНОРОДНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

В.Л. Дильман, А.Е. Кашеева
dilmanvl@susu.ru, kashcheeva@e@susu.ru

УДК 517.958: 539.4

Исследуется обобщенная система уравнений пластического равновесия при плоской деформации, которая в частном случае является системой уравнений пластического равновесия для ортотропных материалов. Методом, основанном на получении в явном виде приближенных аналогов инвариантов Римана на характеристиках, решена обратная внутренняя задача для напряжений на контактной границе.

Ключевые слова: инвариант Римана, анизотропия, дискретно-неоднородные соединения

Исследуется обобщенная система уравнений пластического равновесия при плоской деформации:

$$a \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad b \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2. \quad (2)$$

Здесь x и y - безразмерные координаты точек, σ_x, σ_y и τ_{xy} - напряжения, $a, b > 0$. Она определена на полосе $D = [-1; 1] \times [-\infty; +\infty]$ со вставкой (прослойкой) $D = [-1; 1] \times [-d; d]$, причем $k = k^-$ в прослойке и $k = k^+$ в основном материале (полосе); $k^- < k^+$. Обозначим $K = k^+/k^-$. Эти параметры определяют прочность материалов соединения в критический момент нагружения (в состоянии предразрушения) соединения. Верхний индекс "плюс" или "минус" указывает на основной материал или, соответственно, вставку. Граничные условия на свободной границе:

$$\sigma_x(1, y) = -p, \quad \tau_{xy}(1, y) = 0.$$

Граничные условия на контактной границе $y = \pm d$:

$$\sigma_y^+(x, d) = \sigma_y^-(x, d), \quad \tau_{xy}^+(x, d) = \tau_{xy}^-(x, d)$$

При $a=b$ система равносильна системе уравнений пластического равновесия для ортотропных материалов [1]. Даже в этом частном случае исследование напряженно-деформированного состояния дискретно неоднородной полосы при плоской деформации под растягивающей или сжимающей нагрузкой

Дильман Валерий Лейзерович, д.ф.-м.н., доцент, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Россия; Valery Dil'man (South Ural State University, Chelyabinsk, Russia))

Кашеева Александра Евгеньевна, преподаватель, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Россия; Valery Dil'man (South Ural State University, Chelyabinsk, Russia))

ранее не проводилось. Заметим, что для случая $a = b = 1$ (дискретно неоднородное соединение с однородными изотропными материалами прослойки и полосы) существует обширная литература (см. библиографию в [2]). В работах [3, 4] с целью уточнения математических моделей критических состояний неоднородных соединений предполагалось, что основной материал и материал слоя неоднородны, что существенно усложнило задачу. Цель работы - решение обратной внутренней граничной задачи для напряжений на контактной границе. Это необходимо для вычисления предельной нагрузки, которую может выдержать неоднородное соединение. Система (1) - квазилинейная система гиперболического типа. Метод работы основан на получении в явном виде приближенных аналогов инвариантов Римана на характеристиках [2-4]. С их помощью получены явные приближенные значения нормальных напряжений на контактной границе, то есть, приближенно решена в явном виде указанная выше задача. В частности, на контактной границе:

$$\sigma_y = \left(\frac{1+K}{2} - \frac{a(2-b)^2}{8b}(K-1)^2 \right) (2-b)k^- - p$$

Здесь p - давление на свободную границу.

Литература

1. Hill R. The mathematical theory of plasticity. — Oxford: At the Clarendon Press, 1950.
2. Дильман В.Л., Ерошкина Т.В. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011.
3. Dilman V.L., Karpeta T.V., The stress state of a plastic layer with a variable yield strength under a flat deformation // Russian Mathematics, **57**:8 (2013), 29–36.
4. Dilman V.L., Kashcheeva A.E., On the internal inverse boundary problem in the study of critical conditions of discrete-continuous heterogeneous joints // Journal of Computational and Engineering Mathematics, **12**:3 (2025), 3–13.

ДРОБНО-ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ

Е.С. Долгова, В.А. Соболев, Е.А. Щепаккина

dolgova.es@ssau.ru, v.sobolev@ssau.ru, shchepakina@ssau.ru

УДК 517.928

Многие прикладные задачи содержат управляющие параметры, критические значения которых требуется определить с высокой степенью точности. Однако сложность аналитических вычислений при этом быстро возрастает. Для решения данной проблемы в работе предложены дробно-иррациональные аппроксимации.

Ключевые слова: асимптотические разложения, аппроксимация Паде, вырожденный случай

Рассматривается асимптотическая последовательность функций

$$\varepsilon^{k/3} \ln^s \varepsilon, \quad s = \left[\frac{k}{3} \right], \left[\frac{k}{3} \right] - 1, \left[\frac{k}{3} \right] - 2, \dots, 0, \quad (1)$$

где k - целое неотрицательное число, а квадратные скобки используются для обозначения целой части числа. Выпишем несколько первых членов такой последовательности

$$\sigma_0 = 1, \sigma_1 = \varepsilon^{1/3}, \sigma_2 = \varepsilon^{2/3}, \sigma_3 = \varepsilon \ln \varepsilon, \sigma_4 = \varepsilon, \sigma_5 = \varepsilon^{4/3} \ln \varepsilon, \sigma_6 = \varepsilon^{4/3}. \quad (2)$$

Последовательность (1) представляет собой расширение асимптотической последовательности, которая использовалась для анализа уравнения Ван дер Поля в работах [1,2].

Функцию

$$\{k/m\} = \frac{a_0 + a_1 \sigma_1(\varepsilon) + a_2 \sigma_2(\varepsilon) + \dots + a_k \sigma_k(\varepsilon)}{1 + b_1 \sigma_1(\varepsilon) + b_2 \sigma_2(\varepsilon) + \dots + b_m \sigma_m(\varepsilon)} \quad (3)$$

будем называть дробно-иррациональной аппроксимацией функции

$$F(\varepsilon) = \sum_{i=0}^n c_i \sigma_i(\varepsilon) + o(\sigma_n(\varepsilon)),$$

если

$$F(\varepsilon) - \{k/m\} = o(\sigma_n(\varepsilon)),$$

где $n = k + m$. Можно формально рассматривать дробно-иррациональную аппроксимацию (3) как обобщение рациональной аппроксимации Паде [3]. Элементы последовательности (2) образуют упорядоченную полугруппу с коммутативной операцией умножения, что существенно упрощает задачу построения дробно-иррациональных приближений.

Исследование выполнено за счет средств государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, шифр проекта FSSS-2026-0009.

Долгова Елизавета Сергеевна, аспирант, Самарский университет (Самара, Россия); Elizaveta Dolgova (Samara University, Samara, Russia)

Соболев Владимир Андреевич, д.ф.-м.н., профессор, Самарский университет (Самара, Россия); Vladimir Sobolev (Samara University, Samara, Russia)

Щепаккина Елена Анатольевна, д.ф.-м.н., профессор, Самарский университет (Самара, Россия); Elena Shchepakina (Samara University, Samara, Russia)

Коэффициенты a_i и b_i в (3) находятся путем приравнивания коэффициентов при одинаковых калибровочных функциях [4] в равенстве

$$a_0 + a_1\sigma_1(\varepsilon) + a_2\sigma_2(\varepsilon) + \dots + a_k\sigma_k(\varepsilon) = \\ = (1 + b_1\sigma_1(\varepsilon) + b_2\sigma_2(\varepsilon) + \dots + b_m\sigma_m(\varepsilon))(c_0 + c_1\sigma_1(\varepsilon) + c_2\sigma_2(\varepsilon) + \dots + c_n\sigma_n(\varepsilon)).$$

Для построения дробно-иррациональных аппроксимаций можно рассмотреть различные асимптотические последовательности.

Рассмотрим простой пример линейной дифференциальной системы

$$\dot{x} = y, \quad (1 - \varepsilon)\dot{y} = 2y - x.$$

При $\varepsilon = 0$ фазовый портрет представляет собой неустойчивый вырожденный узел с единственным собственным вектором, которому соответствует единственное одномерное инвариантное многообразие $y = x$. Если малый параметр отличен от нуля, то рассматриваемая дифференциальная система имеет два собственных вектора, которым соответствуют линейные инвариантные многообразия вида $y = L(\varepsilon)x$, где L является корнем уравнения

$$(1 - \varepsilon)L^2 = 2L - 1$$

и представимы в виде разложения по дробным степеням малого параметра [5]

$$L(\varepsilon) = 1 + c_1\varepsilon^{1/2} + c_2\varepsilon + c_3\varepsilon^{3/2} + \dots.$$

Если в качестве асимптотической последовательности рассмотреть последовательность функций $\varepsilon^{k/2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), то дробно-иррациональная аппроксимация вида

$$\{1/2\} = \frac{a_0 + a_1\varepsilon^{1/2}}{1 + b\varepsilon}$$

дает точные выражения для $L(\varepsilon)$ при $a_0 = 1$, $a_1 = \pm 1$, $b = -1$.

Особый интерес представляет рассмотрение вырожденных случаев. В теории аппроксимаций Паде такие ситуации известны и возникают при вырождении определителей Ганкеля [3].

В качестве примера приводится функция $1 + z^2$. Попытка построения дробно-рациональной аппроксимации Паде вида

$$[1/1] = \frac{a_0 + a_1z}{b_0 + b_1z}$$

приводит к равенствам

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, b_0 = 0.$$

Это означает, что $[1/1] = 1$, т.е. попытка оказалась неудачной. Понятно, что причиной неудачи является отсутствие ненулевого слагаемого с первой степенью переменной z . Аналогичная ситуация возникает при попытках построения дробно-иррациональных аппроксимаций в случае, когда $c_1 = 0$. Тем не менее удастся построить некоторые дробно-иррациональные приближения и в этом случае.

Рассмотрены некоторые приложения дробно-иррациональных аппроксимаций в вырожденных случаях.

Литература

1. Дородницын А.А., Асимптотическое решение уравнения Ван дер Поля // Прикл. матем. мех., **11**:3 (1947), 313–328.
2. Жаров М.И., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. О некоторых специальных функциях и константах, возникающих в теории релаксационных колебаний // Докл. АН СССР., **261**:6 (1981), 1292–1296.
3. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. — Москва: Мир, 1986.
4. Nayfeh A.H. Perturbation Methods. — NewYork: Wiley-Interscience, 1973.
5. Hinch E.J. Perturbation Methods. — NewYork: Cambridge University Press, 1991.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ВЕРТИКАЛЬНОГО РЕЗЕРВУАРА ПРИ СНИЖЕНИИ УРОВНЯ ГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Д.С. Ермолин, А.А. Семенов

ist.ermolin.daniil@yandex.ru, sw.semenov@gmail.com

УДК 624.074.433

В работе рассматривается метод моделирования снижения уровня жидкости в деформированном вертикальном цилиндрическом резервуаре путём пересчета гидростатической нагрузки и деформаций стенки вертикального резервуара. Для примера реализации была рассмотрена осесимметричная задача гидростатического нагружения стенок без учета ветровых нагрузок, дно и крышка резервуара принимались как жестко-закрепленные. Численная реализация метода была осуществлена в MATLAB в геометрически линейной постановке для стенки резервуара, моделируемой как оболочка Кирхгофа–Лява и геометрически нелинейной постановке для оболочки Тимошенко–Рейсснера. Результаты численной реализации показали незначительное изменение нагрузки на стенки резервуара, и возрастание значений нагрузки с понижением уровня жидкости при уменьшении толщины стенки резервуара, что встречается при активной коррозии резервуаров.

Ключевые слова: вертикальный резервуар, цилиндрические оболочки, напряженно-деформированное состояние, гидростатическое давление, снижение уровня жидкости, метод Ритца, метод Лебенберга-Марквардта.

Введение. Цилиндрический резервуар представляет собой тонкостенную конструкцию типа оболочки, предназначенную для хранения различных жидкостей, в том числе воды и нефти. Применение цилиндрических оболочечных конструкций в качестве основы резервуара позволяет достичь максимальной долговечности и сохранности, что определяется их прочностью и устойчивостью под различными нагрузками, в том числе гидростатическими, сейсмическими, ветровыми и т.д. Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций является в настоящее время актуальной областью исследования механики деформируемого твёрдого тела ввиду развития новых подходов к описанию различных конфигураций оболочек [1,2]. В работах [3, 4] исследуются вопросы деформирования физически-нелинейных оболочечных конструкций, в работе [5] исследуются геометрически-нелинейные оболочки при динамической нагрузке. При гидростатическом нагружении оболочки, как известно, внешнее воздействие описывается давлением, линейно зависящим от высоты столба жидкости. Стоит отметить, что в настоящее время в малом количестве работ по исследованию напряженно-деформированного состояния вертикальных цилиндрических резервуаров под гидростатической нагрузкой не исследуется вопрос геометрической нелинейности деформирования и снижения уровня жидкости из-за деформаций стенок. Целью работы является

Ермолин Даниил Сергеевич, аспирант каф. ТИММ, ФГБОУ ВО «СПбГАСУ» (Санкт-Петербург, Россия); Ermolin Daniil (SPbGASU, St. Petersburg, Russia)

Семенов Алексей Александрович, д.т.н., профессор, ФГБОУ ВО «СПбГАСУ» (Санкт-Петербург, Россия); Alexey Semenov (SPbGASU, St. Petersburg, Russia)

исследование влияния снижения уровня жидкости в резервуаре на деформацию стенки цилиндрического вертикального резервуара (ЦВР) и нелинейности деформирования стенки в условиях гидростатического нагружения. Для достижения цели были поставлены следующие задачи: разработка метода моделирования напряженно-деформированного состояния стенок резервуара при снижении уровня жидкости, исследование напряженно-деформированного состояния при различных сценариях толщины стенок резервуара, которые воспроизводят сценарий высокоинтенсивного коррозионного износа.

Математическая модель деформации ЦВР при гидростатической нагрузке. Построение метода моделирования основывается на расчетной схеме, приведенной на **Рис.1**. Модель оболочки строится в цилиндрических координатах (r, ϕ, z) и описывается перемещениями срединной поверхности U, V, W и изменением углов нормали Ψ_z, Ψ_ϕ . ЦВР имеет высоту H , толщину стенки δ , радиус срединной поверхности R и высоту уровня жидкости h . В рамках работы задача принимается осесимметричной, края $z = 0, z = H$ считаются жестко закрепленными.

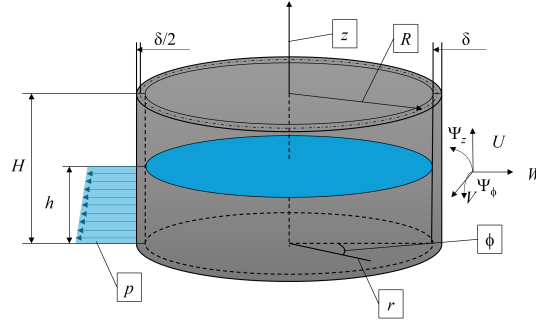


Рис. 1: Расчетная схема ЦВР

Давление столба жидкости p описывается кусочно-линейной функцией

$$p = \rho_l \cdot g \cdot (h - z) \cdot \theta(h - z), \quad (1)$$

где ρ_l – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, $\theta(h - z)$ – функция Хэвисайда аргумента $h - z$. После деформации ЦВР высота уровня изменится и станет h' , а давление столба изменится на значение

$$p' = \rho_l \cdot g \cdot (h' - z) \cdot \theta(h' - z).$$

Величину уровня столба жидкости в деформированном цилиндре h' предлагается находить из уравнения сохранения объема жидкости

$$V_0 = \int_0^{h'} \int_0^{2\pi} \int_0^{R-\frac{\delta}{2}} J_d J dr d\phi dz, \quad (2)$$

где V_0 – начальный объём жидкости в резервуаре, который определяется из формулы $V_0 = \pi(R - \frac{\delta}{2})^2 h$; J – якобиан перехода из декартовых координат в цилиндрические, равный $J = r$; J_d – якобиан перехода из начальных

(лагранжевых) в текущие (эйлеровы) координаты, определяемый как определитель матрицы

$$J_d = \det(\delta_{ij} + D_{ij}), \quad (3)$$

где $i, j = 1, 2, 3$, δ_{ij} – дельта-символ Кронекера, D_{ij} – тензор градиента перемещений (матрица дисторсии), определяемый выражением

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \phi} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{pmatrix} - \frac{\delta}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \phi} & \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_\phi}{\partial \phi} & \frac{\partial \Psi_\phi}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния стенки ЦВР используется принцип возможных перемещений, в рамках которого минимизируется функционал E_s (гипотеза Тимошенко–Рейсснера)

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^H \int_0^{2\pi} [N_z \varepsilon_z + N_\phi \varepsilon_\phi + N_{z\phi} \gamma_{z\phi} + M_z \chi_1 + M_\phi \chi_2 + 2M_{z\phi} \chi_{12} + Q_z(\Psi_z - \theta_1) + Q_\phi(\Psi_\phi - \theta_2) - 2P_z U - 2pW] r dz d\phi. \quad (5)$$

где $N_z, N_\phi, N_{z\phi}$ – внутренние нормальные усилия и сдвиговое усилие в оболочке, приходящиеся на единицу её толщины, $M_z, M_\phi, M_{z\phi}$ – внутренние моменты в оболочке, Q_z, Q_ϕ – перерезывающие усилия, вид усилий и моментов подробно описан в [3]; $\varepsilon_z, \varepsilon_\phi, \gamma_{z\phi}$ – относительные деформации растяжения и сдвига; χ_1, χ_2 – относительные изменения кривизны и кручения; θ_1, θ_2 – компоненты геометрической нелинейности оболочки, перечисленные компоненты геометрических параметров НДС так же описаны в [3]; P_z – массовая нагрузка оболочки, определяемая по формуле

$$P_z = \rho_s g \delta \frac{H - z}{H}.$$

где ρ_s – плотность материала оболочки. В рамках гипотезы Кирхгофа–Лява принимается $\Psi_z = \theta_1$ и $\Psi_2 = \theta_2$, в рамках геометрически-линейной теории принимается $\theta_1^2, \theta_2^2 \ll 1$.

Метод численного исследования. Для решения задачи каждое из перемещений $U, V, W, \Psi_z, \Psi_\phi$ определяется в виде суммы

$$X(z, \phi) = \sum_{i=1}^N X_i \sin\left(i\pi \frac{z}{H}\right),$$

где N – количество членов аппроксимации. Коэффициенты X_i определяют с помощью метода Рунге путем решения системы алгебраических уравнений с помощью алгоритма Левенберга–Марквардта. С помощью полученных значений перемещений $U, V, W, \Psi_z, \Psi_\phi$ и уравнения (3) производится пересчет уровня жидкости в резервуаре, после чего пересчитывается гидростатическая нагрузка (2). Цикл продолжается до тех пор, пока между текущим и предыдущим шагом итерации высоты будет не более 0,005 м.

Результаты численной реализации. Дальнейшие расчеты проводятся для ЦВР при двух сценариях толщины стенки: проектной (12 мм) и экстремально сниженной из-за коррозии (0,375 мм). Рассматриваются четыре варианта численных экспериментов, сочетающих геометрическую линейность/нелинейность оболочки (Кирхгофа–Лява / Тимошенко–Рейсснера) и

зависимость внутреннего давления от деформации (постоянное или изменяемое).

Исходные параметры: материал – сталь С345; модуль Юнга E – 200 000 МПа; коэффициент Пуассона μ – 0,3; предел текучести σ_T – 345 МПа; плотность стали ρ_s – 7830 кг/м³; плотность жидкости ρ_l – 800 кг/м³; объём резервуара V_0 – 10 000 м³; высота H – 17,880 м; радиус R – 14,250 м.

Для каждого варианта анализируются картина деформаций, эпюры перемещений и интенсивности напряжений по критерию фон Мизеса. Результаты приведены на Рис. 2 и Рис. 3. Цвета кривых на рисунках: зелёный – линейная модель, гипотеза Кирхгофа–Лява, без учёта падения уровня жидкости; красный – линейная модель, гипотеза Кирхгофа–Лява, с учётом падения уровня жидкости; фиолетовый – нелинейная модель, гипотеза Тимошенко–Рейсснера, без учёта падения уровня жидкости; синий – нелинейная модель, гипотеза Тимошенко–Рейсснера, с учётом падения уровня жидкости.

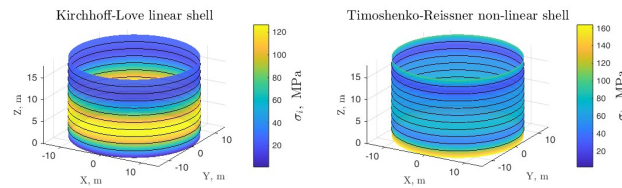


Рис. 2: Картина распределения интенсивности напряжений и деформаций (толщина 12 мм)

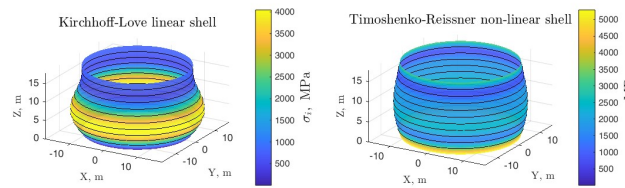


Рис. 3: Картина распределения интенсивности напряжений и деформаций (толщина 0,375 мм)

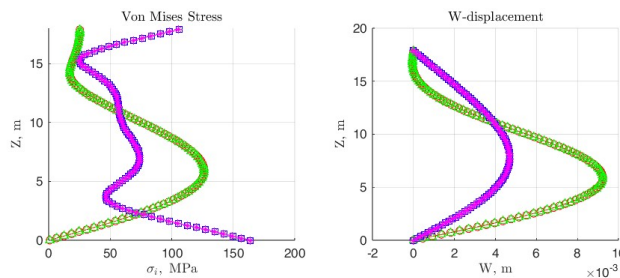


Рис. 4: Эпюры распределения интенсивности напряжений и перемещений по вертикали (толщина 12 мм)

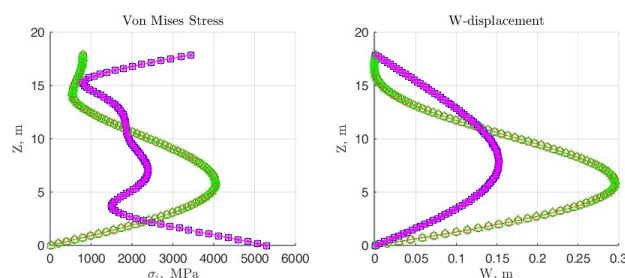


Рис. 5: Эпюры распределения интенсивности напряжений и перемещений по вертикали (толщина 0,375 мм)

Закключение. Применение модели нелинейной деформации с учётом поперечных сдвигов (гипотеза Тимошенко–Рейсснера) для расчета гидростатической нагрузки на стенки ЦВР показывает существенно большие напряжения по сравнению с линейной моделью без учёта поперечных сдвиговых деформаций. Это объясняется добавлением в формулу интенсивности напряжений поперечных компонент касательных напряжений. Даже с учётом того, что предел текучести материала 345 МПа, допускаемые напряжения для стенок резервуара в заданных условиях могут быть существенно меньше, например, 175 МПа.

Учёт снижения уровня жидкости существен при довольно малой толщине оболочки. Снижение уровня жидкости по первому сценарию составило порядка 20 см, по второму – порядка 2-3 м по различным вариантам расчета. В верхней части оболочки различия между перемещениями (до 10 мм) и интенсивностью напряжений (до 200 МПа) начинает преобладать. В реальности, очевидно, такая оболочка подверглась бы пластической деформации, поэтому данный расчет носит цель исследовать и оценить применимость модели, и результат этой оценки показывает, что наибольший отклик эффект снижения уровня жидкости получит в гибких оболочках сосудов из резины, каучуков и т.д. – т.е. мягких оболочек. Перспективой дальнейшего развития работы будет исследования этого эффекта.

Литература

1. Карпов В.В., Бакусов П.А., Масленников А.М., Семенов А.А., Математические модели деформирования оболочечных конструкций и алгоритмы их исследования. Часть I. Модели деформирования оболочечных конструкций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, **23:3** (2023), 370–410.
2. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкреплённых оболочек вращения: в 2 ч. Ч.1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкреплённых оболочек вращения. — М.: Физматлит, 2010. — 288 с.
3. Коровайцева Е.А., Пшеничников С.Г., Бажлекова Е., Желязов Т.А. Нестационарные волны в линейно-вязкоупругом цилиндре с жестким включением // Проблемы прочности и пластичности, **84:1** (2022), 5–14.
4. Коровайцева Е.А. О некоторых особенностях решения задач статики мягких оболочек вращения при больших деформациях // Труды МАИ, 114 (2020), 3.
5. Крысько В.А., Папкова И.В., Крысько А.В. Сложные колебания гибких сферических оболочек (визуализация сценария хаотизации по Фейгенбауму) // Материалы XX юбилейной международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам (ВМСПИС'2017). — Алушта: Издательство МАИ-Принт, 2017. — 268–271.

СХОДИМОСТЬ СЛАБОГО ЖАДНОГО АЛГОРИТМА С ПЕРЕМЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ

В.М. Ершов

ershov189510@yandex.ru

УДК 517.982.256, 517.521.2

Дано определение слабого жадного алгоритма (СЖА) с переменным параметром, который является обобщением СЖА с фиксированным параметром. Найдено условие, при котором этот вариант СЖА сходится.

Ключевые слова: гильбертово пространство, словарь, слабый жадный алгоритм.

Пусть H — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$. Назовем множество $D \subset S(H)$ словарем, если $\overline{\text{span}} D = H$. Здесь $S(H)$ — единичная сфера в H .

Теперь дадим определение слабого жадного алгоритма с переменным параметром. Предположим, что заданы последовательности $\tau = \{t_k\}_{k=1}^\infty$, $0 \leq t_k \leq 1$, и $\{b_k\}_{k=1}^\infty$, $0 < b_k \leq 1$.

Слабый жадный алгоритм (СЖА) с переменным параметром. Определим $f_0 := f$. Затем для каждого $m \geq 1$ последовательно определим:

1. $\varphi_m \in D$ — любой элемент, удовлетворяющий

$$|\langle f_{m-1}, \varphi_m \rangle| \geq t_m \sup_{g \in D} |\langle f_{m-1}, g \rangle|;$$

- 2.

$$f_m := f_{m-1} - b_m \langle f_{m-1}, \varphi_m \rangle \varphi_m;$$

- 3.

$$G_m(f, D) := \sum_{j=1}^m b_j \langle f_{j-1}, \varphi_j \rangle \varphi_j.$$

Случай $b_k = b$, $k = 1, 2, \dots$, был рассмотрен в [1]. Тогда верно следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k b_k}{k} = \infty.$$

Тогда для любого словаря D и любого $f \in H$ выполняется

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - G_m(f, D)\| = 0,$$

т.е. СЖА с переменным параметром сходится.

Ершов Владислав Максимович, студент, Самарский университет (Самара, Россия);
Ershov Vladislav (Samara University, Samara, Russia)

Отметим, что близкий к теореме 1 результат был доказан в [2].

Будем говорить, что словарь D обладает свойством $\star$, если

$$\forall f \in H \exists g_f \in D : |\langle f, g_f \rangle| = \sup_{g \in D} |\langle f, g \rangle|.$$

Следствие 1. Пусть $t_k = 1, k = 1, 2, \dots, u$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} = \infty.$$

Тогда для любого словаря D со свойством $\star$ и любого $f \in H$ выполняется

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - G_m(f, D)\| = 0.$$

Литература

1. *Temlyakov V.N.*, Greedy expansions in Banach spaces // Adv. Comput. Math., **26**:4 (2007), 431–449.
2. *Temlyakov V.N.*, Weak greedy algorithms // Adv. Comput. Math., **12**:2–3 (2000), 213–227.

ОСОБЕННОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ СОЦИОМЕТРИИ СРЕДИ СТУДЕНТОВ ИТ-НАПРАВЛЕНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ

Н.А. Зайчикова

zajna@yandex.ru

УДК 51-77

Статья описывает особенности социометрического исследования проводимого на базе Самарского университета среди студентов ИТ-направления с помощью электронных средств обработки и представления данных. Рассмотрены основные задачи: проведения анкетирования, построения социограмм, расчета социометрических индексов, составления социометрических рейтингов, представления результатов в виде презентаций.

Ключевые слова: социометрия, педагогические исследования в вузе, электронные средства обработки и представления данных в педагогических исследованиях

При изучении математических дисциплин студентами ИТ-направлений особую важность имеет сплоченная и эффективная работа в группе. Это не просто удобный формат, а один из ключевых факторов успеха, который готовит студентов к реальной профессиональной деятельности.

Проанализировать сегодняшнюю ситуацию в этой сфере можно по нескольким направлениям. Во-первых, это преодоление студентами порога сложности математических дисциплин, разных базовых знаний и различных способов мышления. Во-вторых, коллективное решение задач с высокой вероятностью увеличивает скорость и правильность решения, дает возможность для своевременного анализа и устранения ошибок. Далее, групповую работу можно рассматривать как микромодель рабочего процесса в ИТ-индустрии (при работе над крупными проектами, со сложными алгоритмами, с различными инструментами и областями знаний). Еще работа в группе развивает навыки критического и логического мышления, аргументированного отстаивания своей точки зрения, формирует «мягкие навыки» (soft skills: навыки коммуникации, работы с конфликтами, поиска консенсуса), способствует развитию навыков по управлению проектами и временем («тайм-менеджмент»), а также действует как психологическая поддержка и борьба с выгоранием (снижение тревожности, социальная мотивация и здоровая конкуренция, разделение успеха).

Таким образом, сплоченная групповая работа при изучении дисциплин математического блока для студента ИТ-направления — это удобный, общий и наиболее эффективный способ глубокого понимания сложного и абстрактного материала, отработки на практике модели будущей профессиональной деятельности, формирования важных «мягких навыков», а также сохранения мотивации и психологического здоровья в условиях высоких учебных нагрузок. Поэтому важность диагностики и улучшения социального микроклимата в группе, и социометрии как одного из ее видов, трудно переоценить.

Зайчикова Надежда Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Nadezhda Zaychikova (Samara University, Samara, Russia)

Методологической основой исследования послужил социометрический подход, разработанный австрийско-американским психологом и социологом Я.Л. Морено [1]. Социометрия, по Морено, является не только методом диагностики невидимых структур внутригрупповых отношений, но и способом их гармонизации через перегруппировку индивидов в соответствии с их взаимными предпочтениями.

В отечественной социальной психологии и педагогике социометрический метод получил широкое распространение и теоретическое осмысление. Работы Я.Л. Коломинского посвящены изучению межличностных отношений в детских коллективах. Им были разработаны и адаптированы различные модификации социометрической процедуры [2]. А.А. Бодалев рассматривал межличностное познание и общение как ключевые факторы развития личности, подчеркивая важность диагностики взаимоотношений для педагогической практики [3]. Концепция деятельностного опосредствования межличностных отношений, развитая в трудах А.В. Петровского, позволила преодолеть ограниченность классической социометрии, показав, что в группах высокого уровня развития межличностные отношения опосредованы содержанием и целями совместной деятельности [4].

Современные исследования подтверждают высокую валидность и информативность социометрии для анализа групповой динамики в образовательной среде. Работы показывают связь социометрического статуса с самооценкой, уровнем тревожности, академической успешностью и риском девиантного поведения учащихся [5, 6].

Отдельный блок исследований посвящен изучению психолого-педагогических особенностей студентов ИТ-направлений. Часто отмечается их ориентация на индивидуальную работу, высокий уровень развития логического и абстрактного мышления при возможном дефиците коммуникативных навыков [7, 8]. Данная специфика может накладывать отпечаток на формирование межличностных связей в академической группе. Исследования, посвященные непосредственно социометрическому анализу студенческих ИТ-групп, немногочисленны, что подтверждает актуальность и научную новизну настоящей работы.

Социометрические исследования, включенные в научную работу, проводились с 2022 по 2025 год на базе Самарского университета среди ИТ-направления. Описательная часть исследования соответствует структуре, приводимой рядом авторов [9].

В данной работе сосредоточено внимание на особенностях выполнения основных этапов социометрической методики с помощью электронных инструментов. Новые особенности выделены в таких этапах как: 1) проведение анкетирования; 2) расчет социометрических индексов; 3) построения социограмм; 4) составление социометрических рейтингов; 5) представление итоговых отчетов в виде презентаций.

В исследовании проводилась непараметрическая социометрическая процедура, без ограничения числа положительных выборов испытуемого. Что дает преимущество по выявлению эмоциональной экспансивности без риска возникновения социальной напряженности, как это бывает в случае с отрицательными выборами [10].

Первый этап стандартной социометрической процедуры - анкетирование. В классической процедуре анкетирование проводится с помощью бумажных анкет. В данном исследовании ответы давались в Яндекс Формах

с точным указанием вопросов, аналогичным использованным ранее в [11]. Возможен также вариант электронных анкет на собственных серверах вуза, что является предпочтительным. Использование же анкет на различных интернет-платформах не позволяет быть полностью уверенным в сохранности данных и соблюдения этических принципов исследования. В силу этих причин студенты указывают только собственные фамилии и номера выбранных студентов согласно единому списку, заранее представленному каждому респонденту, персональные данные в анкету не включаются.

Этапы со второго по четвертый из приведенного списка (расчет социометрических индексов, построения социограмм, составление социометрических рейтингов) проводятся с помощью обработки данных в программе, написанной на Python. Здесь имеет значение составление таблиц исходных ID студентов и новых номеров, полученных, например, генерацией с помощью датчика псевдослучайных чисел.

Таким образом, на этапе представления данных студентам происходит вывод перекодированных идентификационных номеров, присвоенных каждому в начале исследования. И в итоговой презентации указаны номера, известные только исследователю и самому испытуемому.

Пятый этап, представление итоговых отчетов в виде презентаций, созданных с помощью программы в Python, не имеет существенных отличий по сравнению со стандартной процедурой. В итоговых презентациях приводятся индивидуальные (коэффициент удовлетворенности общением, эмоциональной экспансивности) и групповые (сплоченности, эмоциональной экспансивности и психологической взаимности) социометрические индексы, социограммы, социометрические рейтинги. В связи с тем, что задавалось несколько различных вопросов о выборе одноклассников для различных видов общения и деятельности добавлены: рейтинг осознанности-ответственности выбора, адекватности оценок и сводные социометрические показатели группы по типам общения (по образцу таблиц в [31]).

Основными выводами при использовании электронных и интернет средств являются следующие: очевидны преимущества в скорости обработки и представления данных по сравнению с классической процедурой; требуют особого внимания и тщательной проработки вопросы, связанные с сохранностью данных и этичностью исследования.

Поскольку отлаженная работа в учебной группе — это инвестиция в профессиональное будущее студентов, где сочетаются высокий уровень знаний по дисциплинам и умение работать в команде, которые являются одними из главных компетенций успешного IT-специалиста, то исследование и повышение сплоченности и эффективности внутригрупповой работы, в том числе с помощью социометрической методики, имеют большое прикладное значение. Результаты могут быть использованы преподавателями, кураторами студенческих групп и направлений, службами психологической поддержки вузов.

Литература

1. *Moreno, J.L.* Who Shall Survive? Foundations of Sociometry, Group Psychotherapy and Sociodrama / J. L. Moreno. — N.Y.: Beacon House, 1953. — 763 p.
2. *Коломинский, Я.Л.* Психология взаимоотношений в малых группах (общие и возрастные особенности) / Я.Л. Коломинский. — Минск: Изд-во БГУ, 1976. — 350 с.

3. *Бодалев, А.А.* Личность и общение / А.А. Бодалев. — М.: Международная педагогическая академия, 1995. — 328 с.
4. *Петровский, А.В.* Личность. Деятельность. Коллектив / А.В. Петровский. — М.: Политиздат, 1982. — 255 с.
5. *Кондратьев, М.Ю.* Социальная психология в образовании / М.Ю. Кондратьев. — М.: ПЕР СЭ, 2008. — 384 с.
6. *Gifford-Smith, M.E.*, Peer influence in children and adolescents: Crossing the bridge from developmental to intervention science / M. E. Gifford-Smith, C. R. Brownell // *Psychological Bulletin*, **129**:2 (2003), 295–327.
7. *Ильин, Е.П.* Психология общения и межличностных отношений / Е.П. Ильин. — СПб.: Питер, 2009. — 576 с.
8. *Солдатова, Г.У.* Цифровая компетентность подростков и родителей. Результаты всероссийского исследования / Г.У. Солдатова, Т.А. Нестик, Е.И. Рассказова, Е.Ю. Зотова. — М.: Фонд Развития Интернет, 2013. — 144 с.
9. *Волков И.П.* Исследование лидерства как функции групповой задачи // Социальная психология в трудах отечественных психологов // Экспериментальная и прикладная психология, вып. 4. Л. (1971), 17–22.
10. *Зайчикова Н.А.* Статистический анализ социометрических результатов в студенческих группах экономических специальностей // Шихобаловские чтения: Опыт, проблемы и перспективы развития потребительского рынка: материалы Междунар. науч.-практ. конф., 2-3 июня 2011 г. в 2-х ч. Самара, 2011. — Ч.2. — 233–236.
11. *Зайчикова Н.А.* Социометрия студенческих групп экономических специальностей // В мире научных открытий. Материалы VI Международной научно-практической конференции «Социально-гуманитарные проблемы современности: человек, общество и культура», 10 окт., 2015 г. Социально-гуманитарные науки, 9.2(69) (2015), 506–516. — URL: <http://www.NKRAS.ru/> (дата обращения 10.10.2025).

О МНОЖЕСТВЕ ВЕКТОРОВ МОДУЛЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ СИГНАЛА ПОЛНЫМИ СИСТЕМАМИ

И.М. Избяков

iliya-izbyakov@mail.ru

УДК 517.982.254

В статье анализируется множество векторов модулей измерений, по которым возможно восстановление неизвестного вектор-сигнала с использованием заданной полной системой векторов, а также описывается фактор-пространство восстанавливаемых сигналов в комплексном конечномерном пространстве.

Ключевые слова: полная система, фрейм, альтернативная полнота, восстановление сигнала по модулям измерений

Пусть дано конечномерное пространство с операцией скалярного произведения $\mathbb{H}^D$, где D – размерность пространства и $N \in \mathbb{N}$, причем $N \geq D$. Полная система $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$ в $\mathbb{H}^D$ восстанавливает исходный вектор-сигнал $x \in \mathbb{H}^D$ по модулям измерений (ВМИ), если для любого другого сигнала $y \in \mathbb{H}^D$ из $|\langle x, \varphi_k \rangle| = |\langle y, \varphi_k \rangle|$ для всех $k = 1, \dots, N$, следует, что $x = cy$, где $|c| = 1$.

В конечномерных пространствах понятие полной системы векторов совпадает с понятием фрейма [1]. Хорошо известно, что с точностью до изоморфизма $\mathbb{H}^D$ равно $\mathbb{R}^D$ или $\mathbb{C}^D$.

Для произвольного вектора $x \in \mathbb{H}^D$ определим *вектор модулей измерений*:

$$m(\Phi, x) = (|\langle x, \varphi_1 \rangle|, |\langle x, \varphi_2 \rangle|, \dots, |\langle x, \varphi_N \rangle|) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^N.$$

Множество всех возможных векторов $m(\Phi, x)$ образует *множество векторов модулей измерений фрейма* $\mathcal{M}(\Phi) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^N$. При этом оказывается, что не каждый вектор из $\mathbb{R}_{\geq 0}^N$ принадлежит $\mathcal{M}(\Phi)$, а само множество представляет собой конус в пространстве $\mathbb{H}^D$, поскольку если $m \in \mathcal{M}(\Phi)$, то $am \in \mathcal{M}(\Phi) \forall a \geq 0$.

В конечномерном пространстве набор векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ в $\mathbb{H}^D$ обладает свойством альтернативной полноты (АП) если для каждого подмножества $T \subseteq \{1, \dots, N\}$, по крайней мере, одно из множеств $\{\varphi_k\}_{k \in T}$ или $\{\varphi_k\}_{k \in T^c}$ полно в $\mathbb{H}^D$. В $\mathbb{R}^D$ свойства АП и ВМИ эквивалентны. В $\mathbb{C}^D$ свойство АП является необходимым, но недостаточным для ВМИ [2].

В статье [2] построен пример фрейма в $\mathbb{C}^2$, состоящего из трех векторов с вещественными координатами, который обладает свойством АП, но не обладает свойством ВМИ. При этом в этой же работе доказано, что в $\mathbb{C}^2$ количество векторов, минимально необходимое для восстановления сигнала, равно 4.

Рассмотрим пример фрейма, состоящего из четырех векторов в $\mathbb{C}^2$, который содержит векторы с комплексными координатами, и два вектора

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2025-1791.

Избяков Илья Михайлович, аспирант, Самарский университет (Самара, Россия); Iliia Izbiakov (Samara University, Samara, Russia)

$$x_1, x_2 \in \mathbb{C}^2.$$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix}, \quad \varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что этот фрейм обладает свойством альтернативной полноты и $m(\Phi, x_1) = m(\Phi, x_2) = (1; 1; \sqrt{5}; \sqrt{5})$, однако векторы x_1 и x_2 принадлежат разным классам эквивалентности фактор-пространства $\mathbb{C}^D/\mathbb{T}$.

В формулировке следующего предложения комплексные координаты векторов рассматриваются как вектора на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Предложение. В фактор-пространстве $\mathbb{C}^D/\mathbb{T}$ отождествляются вектора $x = (x_1, \dots, x_D)^T \in \mathbb{C}^D$ и $y = (y_1, \dots, y_D)^T \in \mathbb{C}^D$ тогда и только тогда, когда $|x_i| = |y_i|$, где $i \in \{1, \dots, D\}$, и равны между собой соответствующие углы между координатами векторов x и y , то есть $\hat{x}_i \hat{x}_j = \hat{y}_i \hat{y}_j$ для всех пар $i, j \in \{1, \dots, D\} \times \{1, \dots, D\}$

Литература

1. Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. – Boston: Birkhaeuser, 2002.
2. Bandeira A., Cahill J., Mixon D, Nelson A., Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval. // Applied and Computational Harmonic Analysis, **37**:1 (2014), 106–125.

НЕКОТОРЫЕ СЦЕНАРИИ ЗАТЯГИВАНИЯ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

О.С. Кипкаева, Е.А. Щепакина

kipkaeva.os@ssau.ru, shchepakina.ea@ssau.ru

УДК 517.928

Исследуется явление затягивания потери устойчивости в динамических системах с двумя временными масштабами. Это явление связано с различными критическими режимами в моделируемых процессах, которые зачастую представляют наибольший интерес с точки зрения приложений. В дополнение к уже известным рассматриваются новые сценарии этого явления.

Ключевые слова: затягивание потери устойчивости, динамическая система, разномасштабные переменные, инвариантные многообразия

Исследуется явление смены устойчивости медленным инвариантным многообразием сингулярно возмущенной системы

$$\dot{x} = f(x, y, \mu, \varepsilon), \quad (1)$$

$$\varepsilon \dot{y} = g(x, y, \mu, \varepsilon), \quad (2)$$

где ε — малый положительный параметр, x, y — векторные переменные, μ — вектор дополнительных параметров, векторные функции f и g — достаточно гладкие и принимают значения порядка $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Напомним, под медленным инвариантным многообразием дифференциальной системы (1), (2) понимается некоторая её инвариантная поверхность, фазовая точка на которой имеет скорость порядка $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если все собственные значения матрицы Якоби быстрой подсистемы имеют отрицательные вещественные части, инвариантное многообразие является устойчивым и обладает свойством притяжения траекторий системы. В противном случае медленное инвариантное многообразие является неустойчивым и обладает свойством отталкивания траекторий системы.

В некоторых случаях инвариантное многообразие может одновременно состоять из устойчивых и неустойчивых частей, разделенных границей смены устойчивости. Переход фазовой точки системы через эту границу сопровождается явлением затягивания потери устойчивости и может протекать по разным сценариям.

Наряду с известными сценариями [1-3], первый из которых связан с изменением знака одного вещественного собственного значения матрицы Якоби быстрой подсистемы, второй — с изменением знака вещественной части пары комплексно-сопряженных собственных значений матрицы Якоби быстрой подсистемы, в работе рассматриваются новые сценарии затягивания потери устойчивости.

В качестве иллюстрации рассматривается система вида

Исследование выполнено за счет средств государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, шифр проекта FSSS-2026-0009.

Кипкаева Ольга Сергеевна, аспирант, Самарский университет (Самара, Россия); Olga Kipkaeva (Samara University, Samara, Russia)

Щепакина Елена Анатольевна, д.ф.-м.н., профессор, Самарский университет (Самара, Россия); Elena Shchepakina (Samara University, Samara, Russia)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1, \\ \varepsilon \dot{y}_1 &= g_1(x, y_1, y_2, \mu, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y}_2 &= g_2(x, y_1, y_2, \mu, \varepsilon),\end{aligned}\tag{3}$$

с одной медленной (x) и двумя быстрыми (y_1, y_2) переменными.

Если в системе (3) непрерывные скалярные функции g_1 и g_2 принимают вид:

$$\begin{aligned}g_1(x, y_1, y_2, \mu, \varepsilon) &= y_2, \\ g_2(x, y_1, y_2, \mu, \varepsilon) &= xy_1 + 2xy_2,\end{aligned}\tag{4}$$

то на границе смены устойчивости инвариантного многообразия происходит одновременное обнуление мнимых и отрицательных вещественных частей пары комплексно-сопряженных собственных значений матрицы Якоби быстрой подсистемы, сопровождаемое возникновением пары вещественных собственных значений разных знаков.

Далее рассматривается случай, когда в системе (3) функции g_1 и g_2 имеют вид:

$$\begin{aligned}g_1(x, y_1, y_2, \mu, \varepsilon) &= 2xy_1 + y_2, \\ g_2(x, y_1, y_2, \mu, \varepsilon) &= a(x)y_1 + 2xy_2,\end{aligned}\tag{5}$$

где

$$a(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда смена устойчивости медленным инвариантным многообразием обусловлена тем, что пара комплексно-сопряженных собственных чисел матрицы Якоби быстрой подсистемы, проходя через кратный нулевой корень, становятся вещественными положительными.

Для случая, когда функции g_1 и g_2 имеют вид:

$$\begin{aligned}g_1(x, y_1, y_2, \mu, \varepsilon) &= 2xy_1 + y_2, \\ g_2(x, y_1, y_2, \mu, \varepsilon) &= a(x)y_1 + 2xy_2,\end{aligned}\tag{6}$$

где

$$a(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0, \end{cases}$$

смена устойчивости медленным инвариантным многообразием обусловлена тем, что пара отрицательных вещественных собственных значений матрицы Якоби быстрой подсистемы переходят в пару комплексно-сопряженных собственных значений с положительной вещественной частью.

Во всех трех случаях ось Ox является точным медленным инвариантным многообразием со сменой устойчивости в точке $x = 0$, но затягивание потери устойчивости траекториями, лежащими в малой его окрестности, протекает по разным сценариям.

Поведение траекторий системы (3), берущих начало в области влияния устойчивой части инвариантного многообразия, продемонстрировано на рисунке 1. Траектории, притянувшись к устойчивой части точного инвариантного многообразия и пройдя вдоль оси Ox до границы смены устойчивости в точке $x = 0$ продолжают движение вдоль его неустойчивой части достаточно долгое время, прежде чем последует срыв траектории с медленного

инвариантного многообразия и переход к быстрому движению.

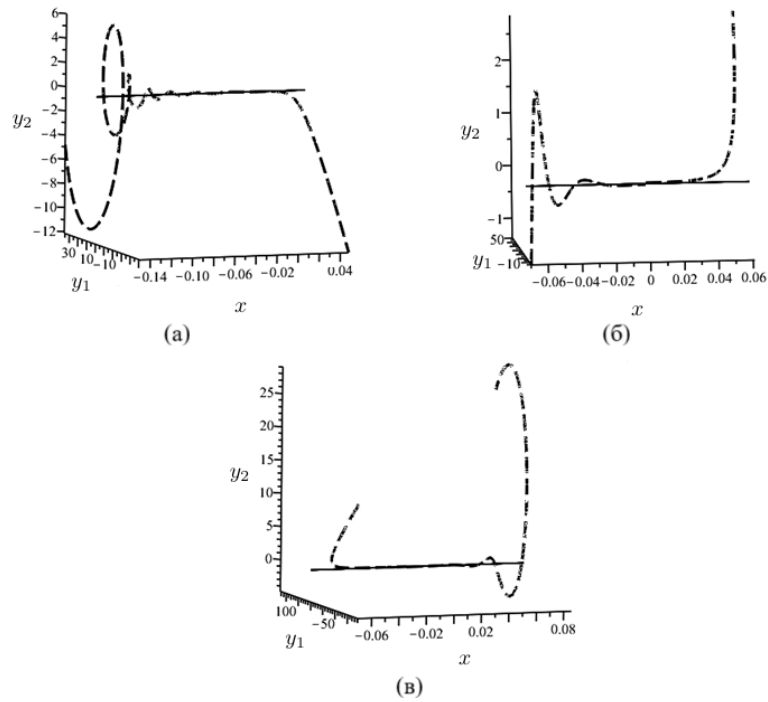


Рис. 1: Точное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости (сплошная линия) и траектория системы (3) (пунктирная кривая) (а) для случая (4), (б) для случая (5) и (в) для случая (6); $\varepsilon = 0,01$

Следует отметить, что все рассмотренные в работе сценарии затягивания потери устойчивости можно наблюдать в дифференциальных системах более общего вида, см., например, [4] для случая (4).

Литература

1. Щепаккина Е.А., Два вида смены устойчивости интегральных многообразий // Дифференциальные уравнения, **40**:5 (2004), 713–716.
2. Шишкова М.А., Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Доклады Академии наук СССР, **209**:3 (1973), 576–579.
3. Нейштадт А.И., Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось // Успехи математических наук, **40**:5 (1985), 300–301.
4. Кипкаева О.С., Щепаккина Е.А., Смена устойчивости инвариантных многообразий дифференциальных систем с разномасштабными переменными // Дифференциальные уравнения, **60**:9 (2024), 1155–1166.

РЕДУКЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЕРТОГЕНЕРАТОРА ДАРЬЕ

А.С. Кирсанова
askirsanova99@gmail.com

УДК 517.928, 519.6

Исследуется математическая модель малой ветроэнергетической установки с вертикальной осью вращения, известной как ветрогенератор Дарье. В работе рассматривается переход от трехтемповой дифференциальной системы уравнений к двухтемповой системе.

Ключевые слова: математическое моделирование; ветрогенератор; траектории-утки; релаксационные колебания; сингулярные возмущения; динамические модели; инвариантные многообразия

Развитие ветроэнергетики в современном мире является актуальным вопросом из-за ряда причин. Во-первых, ветроэнергетика является одним из наиболее экологически чистых видов производства энергии, не выбрасывающим вредные выбросы в атмосферу и не загрязняющим окружающую среду. Также, в связи с уменьшением запасов традиционных источников энергии, таких как нефть и газ, становится все более актуальным поиск альтернативных источников энергии. Ветроэнергетика может стать одним из таких источников, позволяющим уменьшить зависимость от нефти и газа. В-третьих, ветроэнергетика имеет большой потенциал для развития во многих регионах мира, где есть достаточно сильный ветер. В целом, ветроэнергетика является одним из наиболее перспективных направлений развития энергетической отрасли в современном мире.

Рассматривается трехтемповая дифференциальная система уравнений, которая описывает математическую модель малого ветрогенератора Дарье [1–3]:

$$\begin{aligned} J\dot{\Omega} &= M(\Omega) - kI, \\ L\dot{I} &= k\Omega - (R + r)I, \\ \dot{R} &= \varepsilon F(\Omega, I, R). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь Ω — коэффициент быстроходности, I — сила тока в обмотке якоря, R — внешнее сопротивление, M — относительный момент аэродинамических сил, J — момент инерции турбины, L — индуктивность якоря. Остальные константы: k — коэффициент электромеханического взаимодействия, r — малое внутреннее сопротивление якоря. В рассматриваемой системе малыми параметрами берутся величины L и ε , что в свою очередь означает, что внешнее сопротивление R является самой медленной переменной, а переменная силы тока I самой быстрой из трех переменных [4–5]. Точка здесь означает производную по времени t . Так как малый параметр L умножается на $\dot{I}$, то эта система является сингулярно возмущенной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (шифр проекта FSSS-2026-0009).

Кирсанова Алена Сергеевна, аспирант, Самарский университет (Самара, Россия); Alena Kirsanova (Samara University, Samara, Russia)

Система (1) имеет медленное инвариантное многообразие представимое в виде [6–8]:

$$I = h(R, \Omega, L) = h_0 + Lh_1 + L^2h_2 + L^3h_3 + \dots$$

Коэффициенты этого разложения могут быть найдены из уравнения инвариантности:

$$L \frac{\partial h}{\partial R} \varepsilon F(\Omega, h, R) + L \frac{\partial h}{\partial \Omega} \frac{1}{J} (M(\Omega) - kh) = k\Omega - (R + r)h \quad (2)$$

в силу соотношений

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= \frac{M(\Omega) - kh(R, \Omega, L)}{J}, \\ L \left[\frac{\partial h(R, \Omega, L)}{\partial R} \dot{R} + \frac{\partial h(R, \Omega, L)}{\partial \Omega} \dot{\Omega} \right] &= k\Omega - (R + r)h(R, \Omega, L), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\dot{R} = \varepsilon F(\Omega, h(R, \Omega, L), R),$$

где $F(\Omega, R) = \alpha - \Omega$ [1–3].

Ограничимся рассмотрением первого приближения по L , то есть:

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{k\Omega}{R + r}, \\ h_1 &= \frac{-\frac{k\Omega}{(R+r)^2} \varepsilon (\alpha - \Omega) + \frac{k}{R+r} \frac{M(\Omega) - \frac{k^2\Omega}{R+r}}{J}}{-(R + r)}. \end{aligned}$$

Движение по инвариантному многообразию описывается следующей дифференциальной системой [6–8]:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= \frac{M(\Omega) - k(h_0 + Lh_1)}{J}, \\ \dot{R} &= \varepsilon F(\Omega, R), \end{aligned} \quad (4)$$

где $F(\Omega, R) = \alpha - \Omega$ [1–3].

В силу известного принципа сведения Ляпунова [8], это означает, что осуществлена редукция трехтемповой дифференциальной системы к двухтемповой системе. Это позволяет значительно упростить асимптотическое и качественное исследование рассматриваемой модели.

Литература

1. *Kirsanova A., Sobolev V.*, Pade approximants of canards and critical regimes of Darrieus wind turbine model // *Mathematics in Engineering*, **7:3** (2025), 194–207.
2. *Kirsanova A.S.*, Critical Phenomena in the Darrieus Wind Turbine Model // 2023 16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD), IEEE, (2023), 1–4.
3. *Кирсанова А.С.*, Релаксационные колебания в модели ветроэнергетической установки Дарье // *Вестник Самарского университета. Естественная серия*, **30:1** (2024), 31–39.
4. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1976.
5. *Боровских А.В.*, Циклы-утки в уравнении типа Ван-дер-Поля с кусочно-линейной характеристикой // *Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции: Воронежская весенняя математическая*

школа «Понтрягинские чтения — XXVIII» (3–9 мая 2017 г.) / Воронежский государственный университет: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Математический институт им. В.А. Стеклова РАН; Российский университет дружбы народов. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2017. — 203–204.

6. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. — М.: ФИЗМАЛИТ, 2009.

7. *Звонкин А.К., Шубин М.А.*, Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук, **39**:2(236) (1984), 77–127.

8. *Соболев В.А., Щепаккина Е.А.* Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

МАТРИЧНЫЕ ПАДЕ-АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

К.А. Коннова, В.А. Соболев
konnova.ka@ssau.ru, v.sobolev@ssau.ru

УДК 517.518

Работа посвящена применению матричных аппроксимаций Паде для упрощения уравнений гироскопических систем. Установлена эффективность такого подхода, обеспечивающего повышение точности асимптотического представления решений матричных уравнений при нахождении расщепляющего преобразования.

Ключевые слова: гироскопическая система, декомпозиция, асимптотические методы, Паде-аппроксимация

Гироскопические системы представляют собой прецизионные устройства, характерной особенностью которых является способность совершать одновременно высокочастотные нутационные колебания и низкочастотные прецессионные колебания. При асимптотическом анализе уравнений таких систем требуется получать результаты с высокой степенью точности, что требует проведения большого числа громоздких аналитических вычислений. Применение матричных аппроксимаций Паде позволяет существенно повысить точность асимптотических формул без увеличения числа слагаемых в степенных рядах с матричными коэффициентами. В качестве иллюстрации рассматривается система дифференциальных уравнений гировертикали с радиальной коррекцией

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} - H\dot{\beta} - k\beta = 0, \\ A\ddot{\beta} + H\dot{\alpha} + k\alpha = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $A, H, k - \text{const}$ [1]. Эти уравнения хорошо знакомы специалистам по теории гироскопических систем, так как с ними связано явление, которое некоторые авторы называют парадоксом прецессионной теории гироскопов. Суть парадокса заключается в том, что уравнения прецессионной теории асимптотически устойчивы в то время как точная система уравнений неустойчива. Для анализа уравнений гироскопических систем применяется метод расщепления, который предполагает построение специального преобразования [2],

$$x = v + \varepsilon PJz, \quad y = z + \varepsilon Lx, \quad (2)$$

где $L = L(\varepsilon), P = P(\varepsilon)$ - неизвестные матричные функции, которые могут быть найдены из уравнений

$$\varepsilon^2 JL^2 = -(G + \varepsilon D)L - C, \quad P(-(G + \varepsilon D + \varepsilon^2 JL)) = \varepsilon^2 PLJ + I. \quad (3)$$

Исследование выполнено за счет средств государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSSS-2026-0009).

Коннова Кристина Андреевна, аспирант, Самарский университет (Самара, Россия); Konnova Kristina (Samara University, Samara, Russia)

Соболев Владимир Андреевич, д.ф.-м.н., профессор, Самарский университет (Самара, Россия); Sobolev Vladimir (Samara University, Samara, Russia)

Применив расщепляющее преобразование (2), система (1) приводится к блочно-диагональному виду:

$$\begin{cases} \dot{v} = \varepsilon L(\varepsilon)v, \\ \varepsilon J\dot{z} = -(G + \varepsilon D + \varepsilon^2 JL)z. \end{cases} \quad (4)$$

Основной сложностью в решении задачи расщепления является нахождение неизвестных матричных функций $L = L(\varepsilon)$, $P = P(\varepsilon)$. В работе проведено сопоставление результатов применения рациональных и дробно-рациональных аппроксимаций, используемых для вычисления матричных преобразований линейной гироскопической системы (3). В частности асимптотические представления находятся как разложения по степеням малого параметра ε

$$\begin{aligned} L &= L(\varepsilon) = L^{(0)} + \varepsilon L^{(1)} + \varepsilon^2 L^{(2)} + \varepsilon^3 L^{(3)} + \dots, \\ P &= P(\varepsilon) = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + \varepsilon^3 P^{(3)} + \dots; \end{aligned} \quad (5)$$

а также в виде дробно-рациональных аппроксимаций Паде $[m/n]$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k L^{(i)} \varepsilon^i + O(\varepsilon^{k+1}) &\approx A_m(\varepsilon) B_n^{-1}(\varepsilon), \\ \sum_{i=0}^k P^{(i)} \varepsilon^i + O(\varepsilon^{k+1}) &\approx M_m(\varepsilon) N_n^{-1}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (6)$$

где $A_m(\varepsilon)$, $M_m(\varepsilon)$ полиномы степени m с матричными коэффициентами $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$; $M^{(0)}, M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(m)}$, соответственно, и $B_n(\varepsilon)$, $N_n(\varepsilon)$ полиномы степени n , с матричными коэффициентами $I, B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(n)}$; $I, N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n)}$, здесь символом I обозначена единичная матрица.

В ходе численных экспериментов продемонстрировано преимущество аппроксимаций Паде над отрезками степенных рядов с матричными коэффициентами. Важно отметить, что для конкретных приборов такого типа приходится производить вычисления с точностью до 10-12 знаков после запятой, чтобы уловить эффект неустойчивости, а использование матричных аппроксимаций Паде сравнительно невысокого порядка позволило обосновать этот эффект аналитически.

Литература

1. Меркин Д.В. Гироскопические системы. — Москва: Наука, 1974. — 300 с.
2. Воропаева Н.В., Соболев В.А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 256 с.
3. Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г. Построение Паде регулятора для сингулярно возмущенной линейноквадратичной задачи // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2020): труды Тринадцатой международной конференции. — Москва: ИПУ РАН, 2020. — 671–677.
4. Sobolev V.A., Decomposition of linear singularly perturbed systems // Acta. math. Hung., **49**:3–4 (1987), 365–376.
5. Shchepakina E. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications / E. Shchepakina, V. Sobolev, M.P. Mortell. — Berlin; Heidelberg; London: Springer, 2014. — 212 p.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ОТКЛИКА ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ В ПАКЕТЕ ATOMSK

Л.А. Леопеева, Л.В. Степанова
lleopaeva@mail.ru, stepanova.lv@ssau.ru

УДК 539.3

В работе представлены результаты молекулярно-динамического моделирования деформации поликристаллической меди с различным количеством зёрен. Проведено растяжение образцов при одинаковых температурно-динамических условиях. На основе полученных данных построены зависимости интенсивности напряжения от интенсивности деформации. Показано, что увеличение числа зёрен приводит к снижению максимальных напряжений и более раннему переходу материала от упругого к пластическому состоянию.

Ключевые слова: AtomsK, LAMMPS, OVITO, молекулярная динамика, поликристалл, деформация, напряжение

Проблемы моделирования деформирования моно- и поликристаллических материалов с использованием атомистических методов остаются одним из активно развиваемых направлений механики деформируемого твёрдого тела [1-3]. В данной работе исследовалось деформационное поведение поликристаллов меди с гранецентрированной кубической решёткой методом молекулярной динамики в программном пакете LAMMPS. Основной целью моделирования было изучение влияния числа зёрен на переход материала от упругой стадии деформирования к пластической.

Для расчётов были сформированы три кубические модели поликристаллической меди размером $200\text{Å} \times 200\text{Å} \times 200\text{Å}$, содержащие соответственно 5, 10 и 15 зёрен. Генерация микроструктур проводилась с использованием программы AtomsK. Каждая из моделей включала порядка $6,7 \times 10^5$ атомов, причём геометрические размеры и температурно-динамические параметры во всех случаях оставались одинаковыми; различия касались исключительно зеренной структуры. Для моделирования использовался потенциал внедрённого атома, а температура поддерживалась на уровне 300 К.

Растягивающая нагрузка прикладывалась вдоль оси x при неизменной скорости деформации $1,0 \times 10^{-10}$ фс $^{-1}$. В ходе моделирования вычислялись компоненты тензоров деформации и напряжения, на основе которых определялись интенсивности деформации и напряжений. На основе полученных данных построены зависимости напряжения от деформации для каждой из трёх моделей (рисунки 1-3). На начальных участках всех кривых наблюдается линейная зависимость, соответствующая упругому режиму. При достижении критических значений деформации графики отклоняются от линейности, что отражает начало пластического течения материала. Для нескольких характерных точек каждой кривой дополнительно были выполнены визуализации атомной структуры.

Леопеева Лада Алексеевна, студент магистратуры, Самарский университет (Самара, Россия); Lada Leopaeva (Samara University, Samara, Russia)

Степанова Лариса Валентиновна, д.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Larisa Stepanova (Samara University, Samara, Russia)

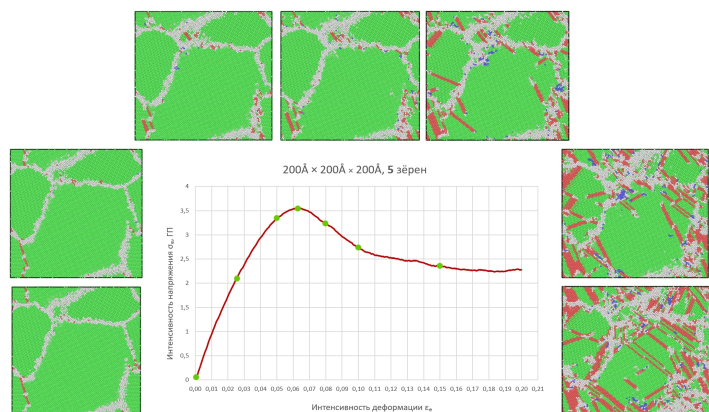


Рис. 1: Кривая зависимости интенсивности напряжения от интенсивности деформации для модели поликристалла из 5 зёрен

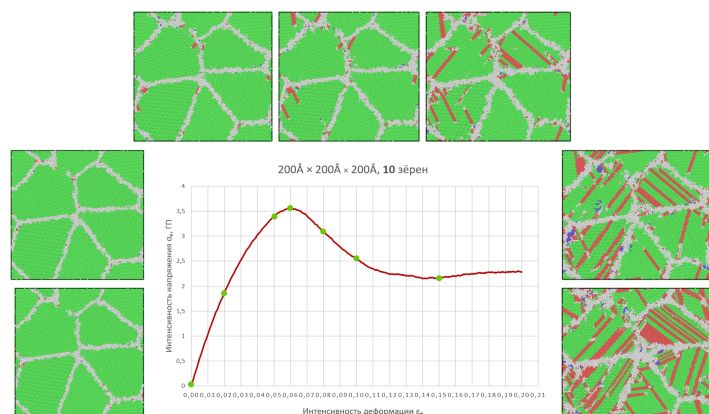


Рис. 2: Кривая зависимости интенсивности напряжения от интенсивности деформации для модели поликристалла из 10 зёрен

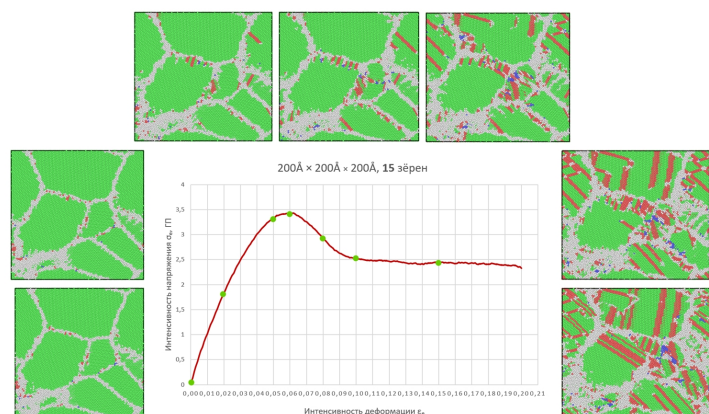


Рис. 3: Кривая зависимости интенсивности напряжения от интенсивности деформации для модели поликристалла из 15 зёрен

Анализ результатов показывает, что уменьшение числа зёрен приводит к росту предела максимального напряжения и более позднему переходу материала в пластическое состояние. В образцах с большим числом зёрен переход в пластическую стадию происходит быстрее, что согласуется с физическим представлением о роли границ зёрен как дефектов, способствующих накоплению и распространению пластических деформаций.

Литература

1. *Мушанкова К.А., Степанова Л.В.*, Определение коэффициентов асимптотического ряда для полей напряжений на основе молекулярно-динамических вычислений // Прикладная механика и техническая физика. — 2025. — №2(390). — 196–212.
2. *Stepanova L.V., Mushankova K.A.*, Atomistic and continuum Ascertainment of The crack tip stress fields in anisotropic elastic cubic media // Theoretical and Applied Fracture Mechanics, **133** (2024), art. no. 104613.
3. *Степанова Л.В., Мушанкова К.А.*, Атомистическое и континуальное определение полей напряжений у вершины трещины в анизотропных средах с кубической сингонией. // Проблемы прочности и пластичности, **86:1** (2024), 15–25.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Г.В. Лисейкин, А.А. Петрова
gleb.liseikin@yandex.ru

УДК 004.942, 629.735.33.015.075

Испытания на натурном летательном аппарате характеризуются сжатыми сроками и большим объемом режимов испытаний, поэтому актуальной является задача планирования эксперимента в целях повышения информативности и точности полученных данных при сокращении времени проведения испытаний. Основным инструментом, применяемым для достижения поставленной цели, является компьютерное моделирование эксперимента, или «виртуальный эксперимент». В работе рассмотрены математические модели объекта испытаний и экспериментального оборудования, а также показана их программная реализация в среде динамического моделирования.

Ключевые слова: частотная характеристика, виртуальный эксперимент, планирование эксперимента, система управления летательного аппарата

Наземные испытания по определению частотных характеристик являются обязательным этапом при проведении комплекса сертификационных расчетно-экспериментальных работ по оценке запасов аэроупругой устойчивости упругой конструкции летательного аппарата с системой управления [1]. Испытания проводятся перед первым полетом летательного аппарата и их результаты используются для валидации расчетных моделей системы управления.

Испытания на натурном летательном аппарате характеризуются сжатыми сроками и большим объемом режимов испытаний, поэтому актуальной является задача планирования эксперимента в целях повышения информативности и точности полученных данных при сокращении времени проведения испытаний. Основным инструментом в данном случае становится компьютерное моделирование эксперимента, или «виртуальный эксперимент».

Применение частотных методов для исследования нелинейных систем возможно при выполнении предположения метода гармонической линеаризации — линейная часть системы должна представлять собой фильтр высокочастотных гармоник. В случае систем управления летательных аппаратов данное предположение выполняется в силу ограничения полосы пропускания исполнительных механизмов, а также благодаря наличию низкочастотных фильтров в трактах управления. Измерения проводятся при различных амплитудах входного сигнала, выделяя при этом зону нечувствительности, линейную зону и зону насыщения. В первой зоне в основном проявляются эффекты квантования по уровню и наличие программной реализации

Лисейкин Глеб Вадимович, ФАУ "ЦАГИ" (Жуковский, Россия); Gleb Liseykin (TsAGI, Zhukovsky, Russia)

Петрова Анастасия Александровна ФАУ "ЦАГИ" (Жуковский, Россия); Anastasia Petrova (TsAGI, Zhukovsky, Russia)

зон нечувствительности входных сигналов, в последней — наличие в законах управления алгоритмов ограничения скорости и амплитуды выходных сигналов.

В рамках данной работы были разработаны математические модели объекта испытаний и экспериментального оборудования, применяемого при проведении эксперимента по определению частотных характеристик. Данные модели применяются и при проведении полунатурного моделирования. Так, в работе [2] приведены результаты определения частотных характеристик некоторых типов нелинейных звеньев на стенде полунатурного моделирования.

Разработанная модель объекта испытаний состоит из моделей датчиков, резервированных вычислителей с цифровыми каналами связи, электрогидравлических рулевых приводов. При моделировании элементов объекта испытаний используются непрерывные и дискретные передаточные функции, нелинейные звенья (зона нечувствительности, люфт, ограничение скорости, квантование по уровню, дискретизация по времени).

Модель экспериментального оборудования состоит из модели частотного анализатора и модели стенда для задания угловых и линейных колебаний чувствительным элементам системы управления. Определение частотных характеристик трактов цифровой системы управления летательного аппарата выполняется путем обработки отклика исследуемой системы на внешнее воздействие. Применяемые на практике методы определения частотных характеристик упругого летательного аппарата с цифровой системой управления изложены в работе [3]. Одним из основных методов, используемых при определении частотных характеристик подобных систем является метод пошагового синуса. При использовании данного метода на вход системы подаются последовательно пакеты гармонических сигналов с различными значениями амплитуд и частот от начальной частоты до конечной с определенным шагом. На каждой частоте выдерживается определенное количество периодов колебаний (периоды задержки) для затухания переходных процессов. После этого на протяжении нескольких периодов колебаний (периодов осреднения) происходит оценка коэффициента усиления и сдвига фазы отклика системы относительно входного воздействия с использованием метода наименьших квадратов. Диапазоны частот и амплитуд, шаг по частоте, количество периодов задержки и осреднения являются параметрами метода и требуют оптимизации на этапе планирования эксперимента.

Математические модели реализованы в среде динамического моделирования. Программный комплекс применяется в интересах задач планирования эксперимента, а также для отработки новых методов идентификации моделей элементов системы управления [4].

Литература

1. Амирьянц Г.А. *Аэроупругость* // Амирьянц Г.А., Зиченков М.Ч., Калабухов С.И., Карклэ П.Г., Кузнецов О.А., Кузьмин В.П., Кузьмина С.И., Лыцинский В.В., Мосунов В.А., Мызин В.А., Назаренко В.В., Назаров В.В., Парышев С.Э., Поповский В.Н., Смыслов В.И., Соболев В.И., Стучалкин Ю.А. под ред. Карклэ П.Г. *Аэроупругость*. — М.: Инновационное машиностроение, 2019. — 402 с.
2. Богатырев М.М., Лисейкин Г.В., Пронин М.А., Смыслов В.И., Разработка воспроизведения нелинейных агрегатов на базе аппаратно-программных средств // *Промышленные АСУ и контроллеры*, 1 (2015), 27–31.
3. Кувшинов В.М., Методы экспериментального определения частотных ха-

рактических характеристик упругого летательного аппарата с цифровой системой управления // Ученые записки ЦАГИ, **XVII**:6 (1986), 54–69.

4. *Лисейкин Г.В., Сафин К.З.*, Идентификация нелинейных моделей звеньев контура «упругий летательный аппарат — комплексная система управления» // Труды МАИ, 137 (2024).

3D-ПЕЧАТЬ КАК ИНСТРУМЕНТ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Любимов Е.А.

LyubimovEvgeny2003@gmail.com

УДК 539.3

В работе рассматривается роль аддитивных технологий в экспериментальной механике, а также возможности 3D-печати для получения оптически чувствительных образцов, предназначенных для последующего анализа напряжённо-деформированного состояния методом цифровой фотоупругости и методом корреляции цифровых изображений (DIC). Продемонстрировано, что использование технологий DLP-печати позволяет создавать прозрачные образцы с контролируемой формой дефектов, что делает возможным исследование обратных задач механики.

Ключевые слова: 3D-печать, экспериментальная механика, фотоупругость, метод DIC, обратные задачи

Развитие экспериментальной механики в последние десятилетия всё более тесно связано с применением бесконтактных и оптических методов анализа напряжённо-деформированного состояния (НДС) тел. Одним из ключевых факторов повышения точности таких исследований является возможность изготовления образцов с заданными внутренними структурами, дефектами и геометрическими особенностями. В этом отношении аддитивные технологии, особенно 3D-печать по технологии DLP, стали важным инструментом, позволяющим исследователю переходить от идеализированных теоретических моделей к физически реализуемым экспериментальным объектам.

В отличие от традиционных методов изготовления образцов, аддитивные технологии дают возможность заранее формировать внутренние полости, включения, надрезы и неоднородности, что критично при постановке обратных задач механики. Например, в задачах идентификации скрытых дефектов требуется иметь экспериментальный объект, в котором характеристики дефекта точно известны. 3D-печать позволяет получить такие образцы с высокой точностью без сложных и дорогостоящих технологических процедур.

Работа выполнена под научным руководством: д.ф.-м.н., доц., зав. кафедрой математического моделирования в механике Степановой Л.В.

Любимов Евгений Александрович, студент группы 4155-01.03.03D «Механика и математическое моделирование», Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва (Самара, Россия); Evgeny Lyubimov (Samara University, Samara, Russia)

Степанова Лариса Валентиновна, д.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет (Самара, Россия); Larisa Stepanova (Samara University, Samara, Russia)



Рис. 1: Геометрия созданная по аддитивной технологии DLP

В ходе исследования были рассмотрены различные классы аддитивных технологий, включая FDM, SLS, SLA и DLP. Было установлено, что только технологии стереолитографии и цифровой световой проекции обеспечивают достаточную оптическую однородность и прозрачность материала для проведения экспериментов методом цифровой фотоупругости. Например, использование фотополимерной смолы Anycubic ABS-Like Resin Pro2 Clear позволило получить образцы, в которых интерференционные картины проявлялись чётко и воспроизводимо.



Рис. 2: Картина изохроматических полос

Особое внимание уделялось возможности моделирования дефектов. Прозрачные образцы со сферическими полостями, полученные методом DLP-печати, демонстрировали характерные искажения поля напряжений, что было подтверждено методами корреляции цифровых изображений (DIC). Это позволяет проводить верификацию аналитических и численных

решений, включая решения обратных задач, направленных на восстановление параметров дефекта по данным поверхности.



Рис. 3: Anycubic photon ultra DLP

Таким образом, 3D-печать выступает не просто технологией прототипирования, но инструментом научного эксперимента, предоставляя возможность:

- формировать заранее контролируемую внутреннюю структуру образца;
- исследовать влияние дефектов на НДС в регулярных условиях;
- проводить верификацию моделей механики и методов решения обратных задач;
- сочетать экспериментальные данные с вычислительными методами (например, МКЭ).

Литература

1. *Yang Ju and others*. Critical phase-transition temperature for freezing stress in thermo-sensitive photopolymers, 2022.
2. Anycubic Photon Ultra: техническая документация производителя, 2023.
3. Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И., Шупанников П.С. Обратные задачи механики включений. — М., 2015.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕСТРОЙКИ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ СПИРАЛИ

В.В. Любимов, П.С. Чеботарева

lyubimov.vv@ssau.ru, chebot_polina0_0@mail.ru

УДК 514.74

В работе представлено математическое моделирование перестройки плоской кривой, в результате которого формируется раскручивающаяся двойная спираль. На основе параметрического подхода получены уравнения фазового портрета кривой, описывающие переход от системы концентрических окружностей к спиральной структуре.

Ключевые слова: перестройка кривой, уравнение окружности, концентрические окружности, параметрическое уравнение, двойная спираль, математическое моделирование

В данной работе рассматривается процесс перестройки плоской кривой, приводящий к формированию раскручивающейся двойной спирали. Основное внимание уделяется получению параметрических уравнений, описывающих данное преобразование. Исходная система концентрических окружностей подвергается поэтапному смещению на величину, равную радиусу наименьшей окружности, что позволяет перейти к уравнению спирали в параметрической форме. Целью работы является построение фазового портрета кривой и анализ численных закономерностей, определяющих её структуру.

Пусть радиус наименьшей окружности $R_1 = a$.

Тогда радиус k -ой окружности задается формулой:

$$R_k = a(2k - 1), k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Верхнюю полуокружность сдвигаем влево на a , нижнюю полуокружность вправо на a .

Исходные окружности задаются уравнениями:

$$\begin{cases} x_0(t) = R_k \cos t, \\ y_0(t) = R_k \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

Рассмотрим верхнюю полуокружность: $\sin t \geq 0$, т.е. $t \in [0; \pi]$.

Сдвигаем центр из точки $(0; 0)$ в точку $(-a; 0)$.

$$\begin{cases} x(t) = x_0(t) - a = R_k \cos t - a, \\ y(t) = y_0(t) = R_k \sin t. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим нижнюю полуокружность: $\sin t < 0$, т.е. $t \in (\pi; 2\pi)$.

Сдвигаем центр из точки $(0; 0)$ в точку $(a; 0)$.

$$\begin{cases} x(t) = x_0(t) + a = R_k \cos t + a, \\ y(t) = y_0(t) = R_k \sin t. \end{cases} \quad (3)$$

Введем $\tau \in [0; 2\pi n)$ — параметр в уравнении спирали.

Любимов Владислав Васильевич, д.т.н., профессор, Самарский университет (Самара, Россия); Vladislav Lyubimov (Samara University, Samara, Russia)

Чеботарева Полина Сергеевна, студент, Самарский университет (Самара, Россия); Polina Chebotareva (Samara University, Samara, Russia)

$\tau = 0$ — начало 1-ой окружности ($k = 1$),
 $\tau = 2\pi$ — конец 1-ой и начало 2-ой окружностей ($k = 2$),
 $\tau = 2\pi n$ — конец n -ой окружности.
 Тогда $k(\tau) = \left[\frac{\tau}{2\pi} \right] + 1$, t — остаток деления τ на 2π .
 Подставим $k(\tau)$ в (1). Получим:

$$R(\tau) = a(2\left[\frac{\tau}{2\pi} \right] + 1) = a(2\left[\frac{\tau}{2\pi} \right] + 1). \quad (4)$$

При подстановке (4) в (2) и (3) получим:

$$\begin{cases} x(\tau) = a(2\left[\frac{\tau}{2\pi} \right] + 1) \cos \tau + as(t), \\ y(\tau) = a(2\left[\frac{\tau}{2\pi} \right] + 1) \sin \tau, \end{cases}$$

где

$$s(\tau) = \begin{cases} -1, & \text{если } \sin \tau \geq 0, \\ 1, & \text{если } \sin \tau < 0. \end{cases}$$

На рисунке 1 изображены концентрические окружности, на рисунке 2 — раскручивающаяся двойная спираль, которая получается с помощью перестройки окружностей.

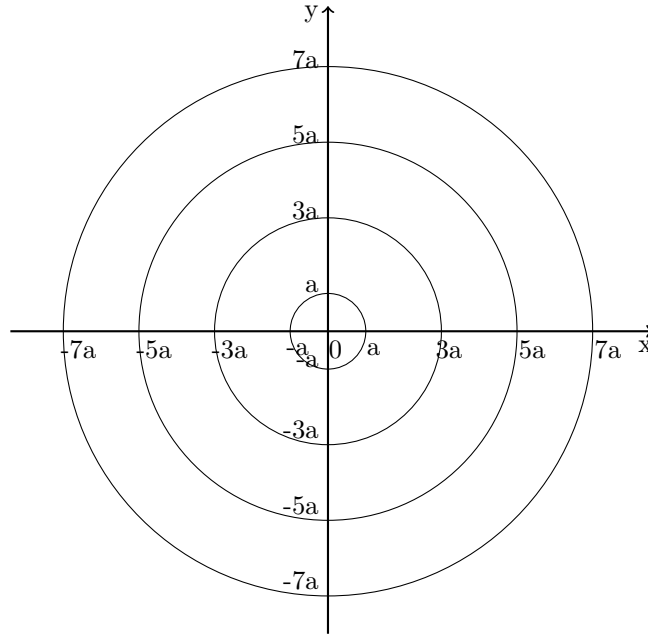


Рис. 1: Концентрические окружности

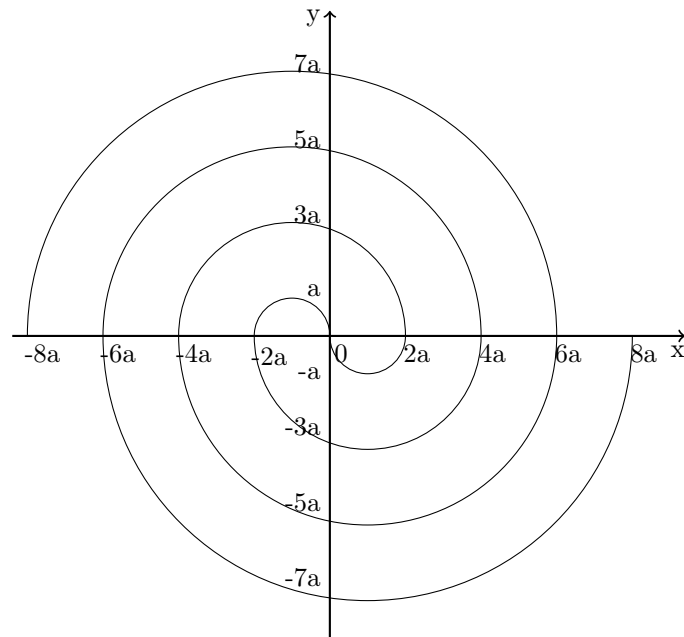


Рис. 2: Двойная спираль

В работе проведено математическое моделирование перестройки системы концентрических окружностей в раскручивающуюся двойную спираль. На основе параметрического подхода получены уравнения, которые описывают данное преобразование.

Литература

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры // 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2023.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия // 5-е изд. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 1999.
3. Беклеммишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ АККУМУЛЯТОРОВ

И.С. Лямин, А.В. Голубков

lyamin.ilya.s@yandex.ru, kr8589@gmail.com

УДК 004.94

Представлен автоматизированный аппаратно-программный комплекс для идентификации параметров математических моделей аккумуляторов. В основе методики лежит автоматизированное получение зависимости напряжения холостого хода от степени заряда с использованием адаптивной неравномерной сетки точек измерений, что позволило сократить время эксперимента более чем на 30 %. Приведен пример идентификации параметров модели Тевенена второго порядка с помощью оптимизационного подхода на основе экспериментальных данных и валидации модели на постоянном и пульсирующем токе нагрузки с применением расширенного информационного фильтра Калмана. Результаты оценивания степени заряда показали высокую точность полученной модели.

Комплекс устраняет ключевые недостатки ручных методов и открывает возможности для работы с различными типами аккумуляторов.

Ключевые слова: математическая модель, электрический аккумулятор, автоматизация, Python, SOC, OCV

Современные области применения аккумуляторных батарей (электротранспорт, беспилотные аппараты, системы хранения энергии) предъявляют высокие требования к точности мониторинга их состояния. Ключевой задачей является оценка степени заряда (State of Charge, SoC), которая не поддается прямому измерению в силу своей природы. Существуют различные методики оценивания SoC [1-3], одним из распространенных методов является использование напряжения холостого хода (Open Circuit Voltage, OCV), связанного с SoC нелинейной функциональной зависимостью. Для повышения точности оценки применяются различные математические модели [4-7], одной из которых является модель Тевенена второго порядка, получившая широкое распространение благодаря учету омических потерь и динамических процессов поляризации ионов в аккумуляторе. Подробно построение используемой модели было рассмотрено в [8], схема замещения показана на рисунке. Данная схема представляет собой разомкнутую цепь, включающую в себя источник напряжения U_0 , в котором напряжение зависит от температуры и степени заряда аккумулятора, резистор R_0 , соответствующий внутреннему сопротивлению батареи, и две RC-цепи: R_1C_1 и

Работа выполнена в рамках Дополнительного соглашения № 073-03-2025-066/1 от 19.03.2025 г. к Соглашению о предоставлении субсидии из федерального бюджета на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) № 073-03-2025-066 от 16.01.2025 г., заключенного между ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова» и Министерством просвещения Российской Федерации.

Лямин Илья Сергеевич, аспирант кафедры высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова (Ульяновск, Россия); Lyamin Ilya (Ulyanovsk State University of Education, Ulyanovsk, Russia)

Голубков Алексей Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова (Ульяновск, Россия); Golubkov Aleksey (Ulyanovsk State University of Education, Ulyanovsk, Russia)

R_2C_2 , которые моделируют переходные процессы, происходящие при быстром и медленном снижении напряжения аккумулятора под нагрузкой.

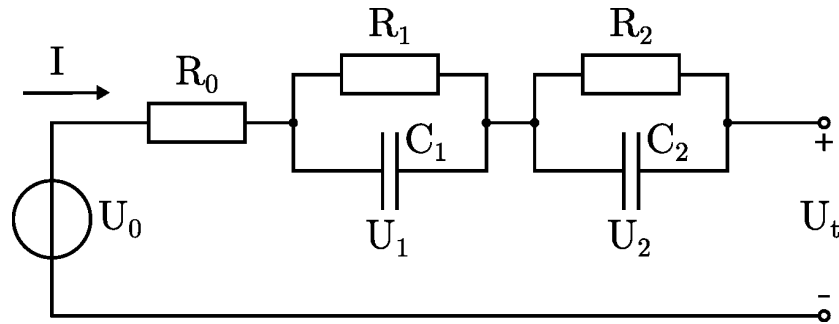


Схема замещения модели Тевенена для электрических аккумуляторов

Основной проблемой при использовании таких моделей является трудоемкая и длительная экспериментальная идентификация их параметров (R_0 , R_1 , C_1 , R_2 , C_2 , $OCV(SOC)$) для конкретного типа аккумуляторов. Одним из ключевых аспектов идентификации параметров модели является получение функциональной зависимости напряжения холостого хода от степени заряда аккумулятора, заключающееся в проведение многократных циклов заряда-разряда аккумулятора с регистрацией получаемых значений напряжения холостого хода. Для получения более точной зависимости требуется большое количество точек измерений, особенно в начале и конце разрядной кривой, где ее форма носит явно выраженный нелинейный характер. Снятие каждой точки зависимости $OCV(SOC)$ включает в себя этап разряда аккумулятора известным током, в результате которого его состояние заряда (SOC) уменьшается на заданную величину. После каждого этапа разряда необходим период релаксации для стабилизации электрохимических процессов, который может длиться от получаса до нескольких часов в зависимости от параметров окружающей среды, типа и номинальной емкости аккумулятора. Таким образом полная длительность эксперимента по получению разрядной кривой для аккумулятора емкостью 3000 мАч может составлять более 20 часов. Этот факт усложняет применение традиционных ручных методов измерений, поскольку многократные циклы заряда-разряда с длительными паузами релаксации (до нескольких часов) занимают продолжительное время и требуют постоянного присутствия оператора. Существующие альтернативы — это либо дорогостоящие промышленные стенды, либо кустарные сборки, не обеспечивающие необходимой точности и воспроизводимости.

В целях преодоления описанных ограничений в рамках данного исследования был разработан аппаратно-программный комплекс (АПК), который позволяет автоматизировать проведение экспериментов по идентификации параметров математических моделей аккумуляторов. К дополнительным возможностям комплекса можно отнести формирование плана и протокола эксперимента, построение графиков и хранение данных проведенных экспериментов с возможностью повторного использования.

АПК построен по модульному принципу, что обеспечивает гибкость и масштабируемость. Аппаратная часть включает в себя управляющий модуль на базе Raspberry Pi 3, программируемую электронную нагрузку Rigol

Идентифицированные параметры математической модели

Параметр	Значение	Единица измерения
R_0	5,2	мОм
R_1	3,9	мОм
R_2	33,4	мОм
C_1	493,58	мкФ
C_2	688,55	мкФ

DL3021, лабораторный блок питания с функцией кулонометрии RIDEN RD6024 и держатель аккумулятора собственной разработки. Программная часть реализована на Python 3.10 с использованием шины событий (Event Bus) для слабосвязанного взаимодействия модулей. Архитектура включает ядро (App, EventBus, AppState) и набор модулей (UIModule для графического или консольного интерфейса, StorageModule для работы с данными в YAML, DeviceManager для управления оборудованием через PyVISA). Эксперименты проводились на литий-ионных аккумуляторах ЛИИЦ-3,0 емкостью 3000 мАч при температуре $25 \pm 0,5$ °C.

Для применения данного комплекса была разработана методика проведения экспериментов, которая включает четыре ключевых этапа:

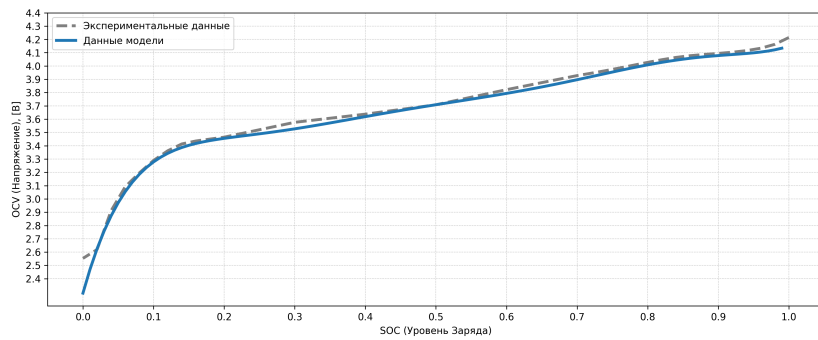
1. Подготовка образца аккумулятора (заряд и измерение реальной емкости).
2. Автоматизированное получение зависимости OCV(SOC).
3. Идентификация параметров математической модели R_0 , R_1 , R_2 , C_1 , C_2 .
4. Валидация полученной модели на сложном профиле нагрузки.

С целью устранения одного из ключевых недостатков существующих методик, а именно большой длительности эксперимента предложен подход с применением адаптивной неравномерной сетки точек измерений. То есть на участках с максимальной нелинейностью зависимости OCV(SOC), таких, как 0-20 % SOC и 70-100 % SOC применяется шаг 2 % SOC, в линейной части зависимости – 10 % SOC. Это позволило сократить продолжительность эксперимента более чем на 30 % без потери точности получаемых данных.

Зависимость OCV(SOC), полученная на основании данных разрядной кривой, аппроксимировалась полиномом седьмой степени [9]. Параметры схемы замещения (R_0 , R_1 , C_1 , R_2 , C_2) идентифицировались с помощью оптимизационной библиотеки Optuna [10] путем минимизации среднеквадратической ошибки (MSE) между данными моделирования и дополнительными экспериментальными данными разряда. В данном эксперименте среднеквадратичная ошибка подбора кривой составила 3,3 мВ, идентифицированные параметры математической модели показаны в таблице.

Валидация полученной модели проводилась путем моделирования процесса разряда аккумулятора и сравнения полученных данных с данными эксперимента. Сравнение показало высокое соответствие данных моделирования реальным экспериментальным данным при разряде постоянным

током (на рисунке).



Сравнение экспериментальных данных с данными моделирования

Дальнейшее тестирование модели в условиях, приближенных к реальным (пульсирующий ток нагрузки с рекуперацией), и оценка SoC с помощью расширенного информационного фильтра Калмана подтвердили ее работоспособность и эффективность алгоритма фильтрации. Статистические показатели ошибки оценки SoC приведены в таблице.

Статистические показатели ошибок оценки SoC	
Показатель	Значение
Максимальная ошибка (ME)	0,0527
Средняя абсолютная ошибка (MAE)	0,0116
Среднеквадратическая ошибка (RMSE)	0,0152
Стандартное отклонение (SD)	0,0151

Таким образом, разработанный аппаратно-программный комплекс позволяет автоматизировать трудоемкий процесс идентификации параметров математических моделей аккумуляторов, значительно сокращая время экспериментов и минимизируя влияние человеческого фактора. Предложенная методика с использованием адаптивной сетки измерений и оптимизационного подхода позволяет с высокой точностью определять параметры модели Тевенена второго порядка. Комплекс обладает значительным потенциалом для расширения функционала и может быть адаптирован для работы с различными типами аккумуляторов и более сложными гибридными моделями, включая учет температурных эффектов и старения батарей.

Литература

1. Чупин Д.П., Гонтовой Е.А., Исследование методов определения степени заряженности никель-металлогидридных аккумуляторов // Динамика систем, механизмов и машин, 3(8) (2020), 88–93.
2. Хандорин М.М., Букреев В.Г., Оценка остаточной емкости литий-ионного аккумулятора на основе эталонной модели // Сибирский аэрокосмический журнал, 1 (53) (2014).
3. Nourallah G., Quan O., Jingwen W., Yali X., Zhisheng W., Review on state of charge estimation techniques of lithium-ion batteries: A control-oriented approach // Journal of Energy Storage, 72:E (2023). ISSN 2352-152X. — DOI: 10.1016/j.est.2023.108707.
4. Язвинская Н.Н., Галушкин Д.Н., Галушкин Н.Е., Обобщение уравнения Пейкерта для построения практических моделей аккумуляторов // Известия

вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки, 2 (2019), 60–68. — DOI: 10.17213/0321-2653-2019-2-60-68.

5. Возмилов А.Г., Панишев С.А., Лисов А.А., Исследование и математическое моделирование литий-ионного аккумулятора // Вестник ЮУрГУ. Серия «Энергетика», **22**:2 (2022), 30–36. — DOI: 10.14529/power220203.

6. Обухов С.Г., Давыдов Д. Ю., Математическая модель аккумуляторной батареи с учетом физических ограничений на доступную мощность // Электрохимическая энергетика, **23**:3 (2023), 121–133. — DOI: 10.18500/1608-4039-2023-23-3-121-133.

7. Pillai P., Sundaresan S., Kumar P., Pattipati K.R., Balasingam B., Open-Circuit Voltage Models for Battery Management Systems: A Review. // Energies, 15, 6803 (2022). — DOI: 10.3390/en15186803.

8. Чернов М.Б., Голубков А.В., Компьютерное моделирование динамики состояния заряда (SOC) электрических аккумуляторов // Ученые записки УлГУ. Серия «Математика и информационные технологии», 1 (2023), 171–179.

9. Zhang R., Bizhong Xia, Baohua Li, Libo Cao [et al.], A Study on the Open Circuit Voltage and State of Charge Characterization of High Capacity Lithium-Ion Battery Under Different Temperature // Energies, 9 (11) (2018), 2408. — DOI: 10.3390/en11092408.

10. Akiba T., Sano S., T. et al. Optuna: A next-generation hyperparameter optimization framework. — KDD, 2019. — DOI: 10.1145/3292500.3330701.

**СОВМЕСТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АГЕНТНОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ И АППАРАТА НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ
ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ
НА ИСТОРИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС ВО ВРЕМЕНА
ДРЕВНЕКИТАЙСКОЙ ДИНАСТИИ ЧЖОУ
(ПЕРИОД БОРЮЩИХСЯ ЦАРСТВ)**

М.К. Макарова, Д.Л. Головашкин

2024-03541@students.ssau.ru, golovashkin.dl@ssau.ru

УДК 51-77

В работе исследуется историческая динамика периода Борющихся царств китайской династии Чжоу с применением агентного моделирования и нейронных сетей. Реализованная модель позволяет выявлять факторы, влияющие на исторический процесс во времена Чжоу, в том числе закономерности, определяющие состояние единства и раздробленности государства.

Ключевые слова: исторический процесс, агентное моделирование, нейронные сети

Введение

Одной из основных задач клиометрии (отрасли науки, занимающейся математическим моделированием исторических процессов) [1] является выявление циклических фрагментов исторического процесса и закономерностей этих фрагментов. Например, известен аппарат циклов Кондратьева [2], теории технологических укладов Глазьева [3] и т. п.

В настоящей работе предлагается развитие идей, предложенных авторами [4], где агентное моделирование позволяет воссоздать взаимодействие государств, выявлять факторы, влияющих на исторический процесс, на примере периода Борющихся царств китайской династии Чжоу (465 - 221 г. до н.э.).

Предполагается улучшить ранее предложенную модель за счёт использования нейронных сетей для оптимизации подбора параметров модели.

1. Агентное моделирование для анализа исторической динамики на примере периода Борющихся царств китайской династии Чжоу

Авторы [4] рассматривают систему из N агентов-государств, каждый из которых обладает мощностью $Pwr(t)$, склонностью к войне $F(t)$, склонностью к заключению союзов p . Основные механизмы модели направлены на описание взаимодействий между государствами.

Война между агентами i и j начинается, если выполнены два условия: склонность i -го государства к войне превышает установленный порог, а мощность i -го государства больше мощности j -го государства, что выражается в формуле:

$$War_{i \rightarrow j} = \begin{cases} 1, & \text{если } F_i \geq y_w \text{ и } Pwr_i > Pwr_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Макарова Мария Константиновна, Самарский университет (Самара, Россия); Maria Makarova (Samara University, Samara, Russia)

Головашкин Дмитрий Львович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладных математики и физики, Самарский университет (Самара, Россия); Dimitriy Golovashkin (Samara University, Samara, Russia)

где y_w - порог склонности к войне, при котором государство начинает конфликт. Итог войны зависит от соотношения мощностей воюющих сторон, а также случайного фактора (ξ), учитывающего неопределенности:

$$Ut_i = Pwr_i + \sum_{a \in Allies_i} Pwr_a + \xi. \quad (2)$$

Каждое государство несет затраты $cost_i$ на войну, которые зависят от ее исхода:

$$cost_i = \begin{cases} \omega, & \text{если победа,} \\ b = \frac{\omega + 1}{2}, & \text{если ничья,} \\ l, & \text{если поражение,} \end{cases} \quad (3)$$

где ω – затраты победителя, b – средние затраты для обеих сторон в случае ничьей, l – затраты проигравшего.

Агент i может предать союзника j , если мощь j падает ниже определённого порога:

$$Loyalty_{i \rightarrow j} = \begin{cases} 1, & \text{если } y_b \cdot Pwr_i \leq Pwr_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

Мощь государства изменяется каждый год t :

$$Pwr_i(t+1) = Pwr_i(t) + \Delta Pwr_i - cost_i, \quad (5)$$

где ΔPwr_i – прирост мощи за счёт естественного роста (например, развитие экономики, населения).

Если мощь i -го государства падает до 0, оно исчезает, а его территория и ресурсы переходят победителю.

Авторы [4] поставили задачу поиска такого набора параметров: (F'_i, p'_i, y'_b, l) , при котором $N(t) = 1$ для достижения единства государства, а $N(t) > 1$ при раздробленности. Смоделированные результаты $(N', T', Wars', Alliances')$ должны минимизировать отклонение от реальных: $N = 1$, $T = 255$, $Wars = 360$, $Alliances = 60$.

2. Использование нейронных сетей совместно с агентной моделью

Модель, предложенная в работе [4], обладает значительными достоинствами: агентный подход хорошо отражает взаимодействия между государствами-агентами, позволяет моделировать процессы войн, союзов и распадов [4].

В работе [5] нейронные сети были предложены для решения проблемы неэффективного поиска параметров агентной модели, очевидно, что эта проблема свойственна и для [4], в силу сходства использования агентного моделирования для анализа социальных систем и выявления закономерностей в поведении агентов.

Автор настоящей работы выбрал комбинированный подход: сначала производится агентное моделирование взаимодействия государств, нейронные сети обучаются на этих данных, и происходит оптимизация модельных параметров – потому что нейронные сети позволяют учитывать множество параметров одновременно и выявлять сложные зависимости, они способны

работать с временными рядами, графовыми структурами взаимодействий [6]. Комбинированный подход повышает гибкость и адаптивность модели к историческим условиям [5].

Для интеграции с агентной моделью были использованы три архитектуры: MLP (многослойный перцептрон) принимает на вход вектор параметров агентов и выдаёт вероятности событий, LSTM (рекуррентная сеть с долгой краткосрочной памятью) применяется к временным рядам состояний системы, что позволяет учитывать последовательность событий, накопление мощи и долгосрочные эффекты решений агентов, GNN (графовая нейронная сеть) строит граф, где вершины - это государства-агенты, рёбра - их союзы и конфликты, анализируя изменение структуры взаимодействий и прогнозируя развитие системы [5, 6].

Программная реализация выполнена на языке Python 3.12 с использованием библиотек NumPy, Pandas, Scikit-learn и других. Агентное моделирование и последующее машинное обучение объединены в единый программный комплекс, который обеспечивает генерацию сценариев, сбор данных, обучение нейронных сетей и анализ результатов.

3. Результаты моделирования

Для оценки эффективности разработанной модели было проведено множество запусков модели с различными наборами параметров, отражающих поведение государств периода Борющихся царств. Для каждой комбинации выполнялось по 500 прогонов, а результаты сопоставлялись с историческими данными (длительность периода, количество войн и союзов). Каждая итерация модели соответствовала одному году исторического времени.

Таблица 1: Влияние склонности к войне на состояние единства или раздробленности

Воинственность	Раздробленность	Единство
0,0	100%	0%
0,1	100%	0%
0,2	8,33%	91,67%
0,3	4,33%	95,67%
0,4	4%	96%
0,5	7,33%	92,67%
0,6	1%	99%
0,7	1%	99%
0,8	1%	99%
0,9	2,67%	97,33%
1,0	2%	98%

Рост склонности к войне от 0,2 до 1,0 способствует ускорению объединения и снижению длительности периода конфликтов. Из таблицы 1 видно, что значение воинственности $F_i \geq 0,2$ приводит к единству в большинстве запусков, тогда как низкая склонность ($< 0,15$) увеличивает вероятность раздробленности.

Таблица 2: Влияние склонности к союзам на паттерн единства или раздробленности

Склонность к союзам	Раздробленность	Единство
0,0	0,33%	99,67%
0,1	2,67%	97,33%
0,2	17,67%	82,33%
0,3	41,33%	58,67%
0,4	66,33%	33,67%
0,5	84,33%	15,67%
0,6	93%	7%
0,7	95%	5%
0,8	99%	1%
0,9	98,33%	1,67%
1,0	98,67%	1,33%

При увеличении склонности к союзам растет количество союзов и длительность конфликтов, что замедляет объединение. По результатам моделирования сформирована таблица 2, где можно увидеть долю единства и разобщенности при разных уровнях склонности к союзам.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что значение склонности к союзам $p_i < 0,3$ способствует единству. Более высокая склонность к союзам приводит к раздробленности.

Таблица 3: Влияние порога предательства на состояние единства или раздробленности

Порог предательства	Раздробленность	Единство
0,1	99,33%	0,67%
0,2	99,67%	0,33%
0,3	99,67%	0,33%
0,4	99,67%	0,33%
0,5	99%	1%
0,6	99,67%	1,33%
0,7	93,33%	6,67%
0,8	65,33%	34,67%
0,9	16,67%	83,33%
1,0	14%	86%

Повышение порога предательства делает союзы устойчивыми и ускоряет объединение. Значения порога $y_b \geq 0,8$ приводят к формированию

стабильных союзов и росту вероятности единства, что видно из таблицы 3.

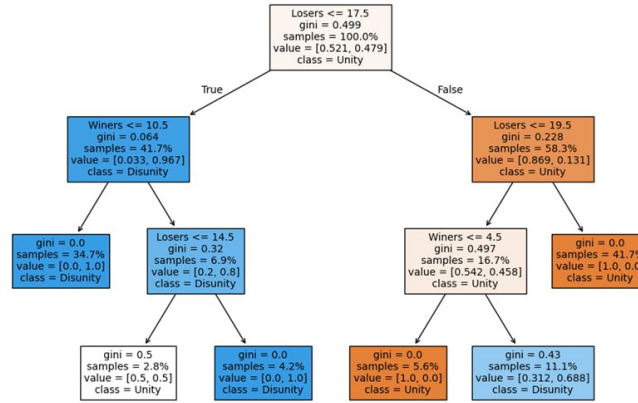


Рис. 1: Влияние стоимости войны на состояние единства или раздробленности

Рост издержек поражений усиливает давление на государства, снижая склонность к войнам. Как видно из рисунка 1, при $l \geq 17,5$ вероятность единства становится преобладающей.

Заключение

Реализованная модель, сочетающая в себе агентное моделирование и нейронные сети, позволяет выявлять факторы, влияющие на исторический процесс во времена Чжоу, в том числе закономерности, определяющие состояние единства и раздробленности государства. Использование нейронных сетей повышает точность прогнозов, учитывая сложные зависимости между государствами.

А именно были определены параметры, при котором государство достигает состояния единства: умеренно высокая воинственность ($F_i \geq 0, 2$), низкая склонность к союзам ($p_i < 0, 3$), высокий порог предательства ($y_b \geq 0, 8$) и высокая стоимость поражений ($l \geq 17, 5$).

Литература

1. Соколов А. С., Клиометрика в историческом пространстве (количественная экономическая история в контексте современных междисциплинарных исследований) // Электронный научно-образовательный журнал "История 2 (56) (2017), 20.
2. Гринин Л.Е., Коротаев А.В., Кондратьевские волны в мирсистемной перспективе // Кондратьевские волны, 1 (2012), 58–109.
3. Глазьев С. Ю., Открытие закономерности смены технологических укладов в ЦЭМИ АН СССР // Экономика и математические методы, 54:3, 17–30.
4. Lu P., Zhang Z.,Henrietta C., Li M., Human civilization dynamics: why we have different civilization patterns in history // Humanities and Social Sciences Communications, 10:1 (2023), 1–13.
5. Lamperti F., Agent-based model calibration using machine learning surrogates // Journal of Economic Dynamics and Control, 90 (2018), 366–389.
6. Иванько А.Ф., Иванько М.А., Сизова Ю.А., Нейронные сети: общие технологические характеристики // Научное обозрение. Технические науки, 2 (2019), 17–23.

О СИСТЕМАХ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ МАКСИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА

А.С. Макин

alexmakin@yandex.ru

УДК 517.984.52

В работе рассматриваются свойства систем корневых функций максимального оператора оператора Дирака с произвольным комплекснозначным суммируемым потенциалом. Устанавливается необходимое условие сходимости соответствующих спектральных разложений.

Ключевые слова: оператор Дирака, система корневых функций, сходимость спектральных разложений

В настоящей работе изучается система Дирака

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \quad (1)$$

где $\mathbf{y} = \text{col}(y_1(x), y_2(x))$,

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & P(x) \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix},$$

функции $P, Q \in L_1(0, \pi)$, в пространстве $\mathbb{H} = L_2(0, \pi) \oplus L_2(0, \pi)$ со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^\pi (f_1(x)\overline{g_1(x)} + f_2(x)\overline{g_2(x)})dx,$$

где $\mathbf{f} = \text{col}(f_1(x), f_2(x))$, $\mathbf{g} = \text{col}(g_1(x), g_2(x))$.

Определим в пространстве $\mathbb{H}$ максимальный оператор $\mathcal{L}\mathbf{y} = B\mathbf{y}' + V\mathbf{y}$ в области $D(\mathcal{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0, \pi] \oplus W_1^1[0, \pi] : \mathcal{L}\mathbf{y} \in \mathbb{H}\}$.

Следуя В.А. Ильину [1], корневые вектор-функции оператора $\mathcal{L}$ понимаются в обобщенном смысле, т. е. вне зависимости от краевых условий. Более точно, под собственной функцией оператора $\mathcal{L}$, соответствующей комплексному собственному значению λ подразумевается любая комплекснозначная функция $\overset{0}{\mathbf{y}} \in D(\mathcal{L})$ ($\overset{0}{\mathbf{y}} \neq 0$), удовлетворяющая уравнению $\mathcal{L} \overset{0}{\mathbf{y}} = \lambda \overset{0}{\mathbf{y}}$ почти всюду в области $G = (0, \pi) \times (0, \pi)$. Аналогично, под присоединенной функцией $\overset{l}{\mathbf{y}}$ оператора $\mathcal{L}$ порядка $l = 1, 2, \dots$, соответствующей тому же λ и собственной функции $\overset{0}{\mathbf{y}}$ подразумевается любая комплекснозначная функция $\overset{l}{\mathbf{y}} \in D(\mathcal{L})$, удовлетворяющая уравнению $\mathcal{L} \overset{l}{\mathbf{y}} = \lambda \overset{l}{\mathbf{y}} + \overset{l-1}{\mathbf{y}}$ почти всюду в G .

Пусть $\{\mathbf{y}_n\}$ – произвольная система состоящая из собственных и присоединенных вектор-функций оператора $\mathcal{L}$, а λ_n – соответствующая система собственных значений ($n = 1, 2, \dots$). Кроме того, пусть функция $\mathbf{y}_n$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы регионального Азово-Черноморского математического центра по соглашению № 075-02-2025-1620.

Макин Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики и механики (Донецк, Россия); Alexander Makin (Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Russia)

принадлежит системе $\{\mathbf{y}_n\}$ вместе со всеми присоединенными функциями меньшего порядка. Это означает, что $\mathcal{L}\mathbf{y}_n = \lambda_n\mathbf{y}_n + \theta_n\mathbf{y}_{n-1}$, где n равно либо 0 (в этом случае $\{\mathbf{y}_n\}$ является собственной вектор-функцией), либо 1 (в этом случае, $\{\mathbf{y}_n\}$ является присоединенной вектор-функцией, причем $\lambda_n = \lambda_{n-1}$).

Обозначим через $\mathcal{L}^*$ оператор, формально сопряженный к оператору $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}^* = B\mathbf{y}' + V^*\mathbf{y},$$

где

$$V^* = \begin{pmatrix} 0 & \bar{Q}(x) \\ \bar{P}(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$B\mathbf{z}' + V^*\mathbf{z} = \bar{\lambda}\mathbf{z}, \quad (1^*)$$

где $\mathbf{z} = \text{col}(z_1(x), z_2(x))$.

Основной целью настоящей заметки является доказательство того, что условие (2)

$$|\text{Im}\lambda_n| < C \quad (2)$$

есть необходимое условие базисности в пространстве $\mathbb{H}$ системы корневых функций $\{\mathbf{y}_n\}$.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ являются соответственно решениями уравнений (1) и (1*). Если

$$|\text{Im}\lambda| \rightarrow \infty, \quad \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = 1,$$

то

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{H}}\|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}} \rightarrow \infty.$$

Теорема 1. Предположим выполнены следующие условия:

1) Пусть $\{\mathbf{y}_n\} = \text{col}(y_{1,n}(x), y_{2,n}(x))$ произвольная полная в $\mathbb{H}$ и минимальная система, состоящая из собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}$, а λ_n – соответствующие собственные значения ($n \in \mathbb{N}$);

2) Пусть биортогонально сопряженная система $\{\mathbf{z}_n\} = \text{col}(z_{1,n}(x), z_{2,n}(x))$ ($\langle \mathbf{y}_n, \mathbf{z}_k \rangle = \delta_{n,k}$) состоит из собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}^*$, а $\bar{\lambda}_n$ – соответствующие собственные значения;

3) Системы $\{\mathbf{y}_n\}$ и $\{\mathbf{z}_n\}$ содержат конечное число присоединенных функций;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} |\text{Im}\lambda_n| \rightarrow \infty$.

Тогда система $\{\mathbf{y}_n\}$ не является базисом в $\mathbb{H}$.

Заметим, что многие краевые задачи для системы (1) с двухточечными краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{y}) &= a_{11}y_1(0) + a_{12}y_2(0) + a_{13}y_1(\pi) + a_{14}y_2(\pi) = 0, \\ U_2(\mathbf{y}) &= a_{21}y_1(0) + a_{22}y_2(0) + a_{23}y_1(\pi) + a_{24}y_2(\pi) = 0 \end{aligned}$$

удовлетворяют всем условиям теоремы 1.

Литература

1. Ильин В.А., О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // Доклады АН СССР, **273**:5 (1983), 1048–1053.

МЕТОДЫ АУГМЕНТАЦИИ ДАННЫХ ОГРАНИЧЕННОГО ОБЪЕМА В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

И.В. Макляев, С.П. Дударов

makliaev.i.v@muctr.ru, dudarov.s.p@muctr.ru

УДК 004.8

Рассмотрены методы аугментации данных: зашумление, масштабирование, использование генеративных моделей, рекомендованные для повышения устойчивости нейронных сетей при моделировании биотехнологических процессов на малых выборках. Показано влияние этих методов на снижение переобучения и улучшение обобщающей способности моделей.

Ключевые слова: аугментация данных, машинное обучение, нейронные сети, биотехнологические процессы, переобучение

1. Понятие и назначение аугментации данных

Аугментация данных — методы, направленные на увеличение объёма и разнообразия обучающей выборки путём искусственного создания новых примеров на основе исходных данных [1]. Согласно работе [1] основная цель аугментации заключается в повышении способности модели к обобщению, то есть её устойчивости к незначительным изменениям во входных данных, которые не должны влиять на качество отклика. Это - один из ключевых подходов регуляризации, позволяющей бороться с переобучением, особенно в условиях дефицита реальных экспериментальных данных.

В случае машинного обучения и, в частности, нейросетевого моделирования, аугментация решает несколько важных задач. Во-первых, она компенсирует недостаток данных, что критично для сложных моделей с большим количеством параметров, требующих обширной обучающей выборки. Во-вторых, аугментация расширяет пространство признаков, по которому модель может находить закономерности и классифицировать образы. В-третьих, она позволяет создавать более сбалансированные выборки в случаях дисбаланса данных внутри признаков или между классами. В задачах моделирования биотехнологических процессов, где сбор данных может быть ограничен высокой стоимостью и длительностью экспериментов, аугментация становится не просто полезным, но и необходимым инструментом.

2. Основные направления аугментации данных

Методы аугментации можно условно разделить на несколько категорий в зависимости от типа данных и вида применяемых преобразований. Для временных рядов, характерных для биотехнологических процессов, наиболее уместны следующие подходы:

1. Геометрические преобразования, включающие масштабирование (изменение амплитуды), сдвиг (по оси времени) и искажение формы сигнала. Эти методы имитируют естественные вариации в скорости или интенсивности описываемого процесса;
2. Шумовая аугментация - добавление случайного, но подчинённого некоторому закону распределения, шума к исходным данным, что является

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 24-71-10003).

Макляев Илья Васильевич, аспирант, Российский химико-технологический университет имени Д. И. Менделеева (Москва, Россия)

Дударов Сергей Павлович, к.т.н., доцент, Российский химико-технологический университет имени Д. И. Менделеева (Москва, Россия)

одним из простейших и эффективных способов повышения устойчивости модели к измерительным ошибкам и стохастическим флуктуациям [1];

3. Использование генеративных моделей, таких, как генеративно-состязательные сети или автоэнкодеры, для создания новых, но реалистичных примеров данных на основе распределения исходной выборки.

3. Особенности моделирования биотехнологических процессов и проблема малых выборок

Биотехнологические процессы, например, ферментация микроорганизмов, представляют собой сложные динамические системы, характеризующиеся высокой степенью нелинейности и взаимосвязью множества факторов. На ход процесса влияют начальные концентрации продуктов и субстрата, условия культивирования (температура, pH, уровень кислорода), а также внутренние метаболические пути микроорганизмов. Кроме того, процесс проведения и контроля ферментации по своей природе в значительном объёме содержит стохастические компоненты: колебания активности клеток, незначительные вариации в подготовке среды, погрешности измерительных приборов. Всё это делает математическое моделирование таких процессов крайне затруднительным.

Один из наиболее эффективных инструментов, набравший популярность в последние годы и способный сгладить значительную часть выпеперечисленных сложностей — искусственные нейронные сети, способные выявлять скрытые зависимости в экспериментальных данных без необходимости в явном задании и учёте всех механизмов. Тем не менее, ключевой проблемой остаётся ограниченный объём доступных для создания модели экспериментальных данных. Как показывают исследования, обучающие выборки в задачах моделирования процесса ферментации могут содержать лишь несколько десятков или сотен примеров. Например, в работах по моделированию метаболизма бифидобактерий [2, 3] использовались выборки, включавшие от 38 до 123 примеров. Такой малый объём данных, с одной стороны, значительно повышает информационную важность каждого отдельно взятого примера, а с другой стороны, создаёт серьёзную угрозу переобучения нейронной сети, когда модель запоминает конкретные шумы и ошибки, связанные с получением обучающей выборки, вместо того чтобы учиться на общих закономерностях. Это приводит к снижению общей моделирующей способности обученных нейронных сетей при работе с новыми, ранее не встречавшимися данными и, соответственно, снижает практическую ценность модели.

С учётом указанных выше ограничений применение методов аугментации становится крайне важным для повышения качества моделей, описывающих процессы биотехнологии. Рассмотрим несколько наиболее перспективных подходов.

4. Методы аугментации данных для биотехнологических задач

Шумовая аугментация — один из наиболее значимых методов работы с выборкой при решении задач моделирования в биотехнологии. Наиболее распространённым вариантом является добавление белого шума, подчиняющегося нормальному или равномерному распределению с нулевым средним значением и заданной дисперсией [1]. Максимальный уровень шума должен быть подобран таким образом, чтобы он был сравним с естественной вариабельностью процесса, не искажая его основную динамику. Этот метод эффективно заставляет нейронную сеть игнорировать мелкие детали

и возможные ошибки и сосредотачиваться на наиболее значимых трендах, что эффективно повышает её обобщающую способность.

Масштабирование и сдвиг являются простыми, но мощными методами. Масштабирование по оси времени может имитировать биотехнологические процессы, протекающие с разной скоростью (например, из-за различий в активности культур). Масштабирование по амплитуде может моделировать вариации в начальной биомассе или выходе продукта. Сдвиг данных по времени помогает модели научиться распознавать паттерны независимо от их абсолютного положения в эксперименте. Эти преобразования особенно полезны, если исходные данные получены в условиях, близких к стационарным, и необходимо расширить диапазон возможных сценариев, моделируемых сетью.

Генерация на основе физических моделей заключается в использовании упрощённых аналитических или полуэмпирических моделей биотехнологических процессов для генерации дополнительных траекторий. Например, можно использовать базовые кинетические уравнения роста микроорганизмов типа Моно для генерации новых кривых роста при различных комбинациях параметров. Полученные синтетические данные затем используются для обучения нейронной сети. Этот метод обеспечивает высокую семантическую достоверность сгенерированных примеров, поскольку они основаны на известных физико-химических законах. Хотя этот подход требует предварительных глубоких знаний о системе, он позволяет значительно увеличить объём данных, сохраняя их реалистичность.

Стоит упомянуть о возможности совместного использования части или всех вышеперечисленных методов аугментации с целью получения обучающей выборки, обладающей всем спектром их преимуществ.

5. Оценка и подтверждение эффективности аугментации

Оценка влияния аугментации на качество модели необходима для качественного и количественного подтверждения её эффективности. Наиболее надёжным и широко используемым методом является кросс-валидация, которая предназначена для оценки способности модели обобщаться на независимых наборах данных [4]. Основным методом кросс-валидации — k -Fold, предусматривающий разбиение выборки на k пакетов по k примеров в каждом, серию из k процессов обучения, в которых последовательно каждый из пакетов выступает в качестве тестового, а остальные $k - 1$ пакет — в качестве обучающих, и завершающее обобщение результатов всех тестирований. Данный метод эффективен для исходных выборок большого и среднего объёмов, однако, в моделировании биотехнологических процессов, обусловленных чаще всего использованием малых выборок, лучше применять его частный случай — метод Leave-one-out [4], в котором в качестве тестового примера одного процесса обучения выступает только один из выборки, а остальные используются для настройки весовых коэффициентов.

Также можно модифицировать оба упомянутых метода, предусмотрев повторения обучения для каждой из обучающих выборок при разных начальных значениях весовых коэффициентов. Это позволит снизить дисперсию итоговой оценки [4].

Для задач регрессии, типичных для моделирования биотехнологических временных рядов, основными метриками являются средняя абсолютная ошибка и среднеквадратичная ошибка. Эффективность аугментации оценивается по величине этих метрик на обучающей и/или тестовой выборках

по сравнению с моделью, обученной на исходных данных без аугментации: чем они меньше, тем лучше. Также важно анализировать стабильность обучения: успешная аугментация часто приводит к более плавной и быстрой сходимости процесса обучения, что является косвенным признаком лучшей регуляризации.

Эффективность аугментации как одного из этапов нейросетевого математического моделирования и средства повышения качества моделей, описывающих процессы в биотехнологии и смежных областях, подтверждается различными исследованиями. В серии публикаций, посвящённых моделированию непрерывного культивирования бифидобактерий, были успешно применены нейросетевые модели для прогнозирования концентраций молочной и уксусной кислот при объёме обучающих выборок в 88 и 38 примеров соответственно [2]. В работе [3] была получена модель метаболизма бифидобактерий на выборке из 123 примеров. Во всех случаях оценочное сравнение с традиционными методами математического моделирования таких процессов и с результатами моделирования без аугментации показало значительное улучшение результатов.

6. Заключение

Таким образом, методы аугментации данных представляют собой высокоэффективный и зачастую необходимый инструмент для решения задач моделирования биотехнологических процессов в условиях ограниченного объёма экспериментальных данных без проведения дополнительных дорогостоящих экспериментов. Их применение позволяет преодолеть риск переобучения нейронных сетей, что напрямую ведёт к повышению обобщающей способности и надёжности моделей. Рассмотренные методы аугментации хорошо согласуются с природой чувствительных ко множеству факторов биотехнологических процессов.

Опыт исследований в области нейросетевого моделирования метаболизма микробиологических сообществ подтвердил, что использование методов аугментации является целесообразной и перспективной стратегией, позволяющей разрабатывать качественное математическое описание сложных биотехнологических систем, а следовательно, способствующей созданию эффективных инструментов управления этими процессами для получения целевых продуктов.

Литература

1. Гудфеллоу Я., Бенджио И., Курвилль А. Глубокое обучение. — М.: ДМК Пресс, 2018. — 240 с.
2. Макляев И.В., Нозаева В.С., Леметюйнен Ю.А., Евдокимова С.А., Кареткин Б.А., Гусева Е.В., Дударов С.П., Нейросетевое моделирование изменения концентрации молочной кислоты в ходе непрерывной ферментации бифидобактерий // Бутлеровские сообщения, **64**:11 (2020), 61–69.
3. Макляев И.В., Кареткин Б.А., Дударов С.П., Нейросетевая модель метаболизма бифидобактерий при непрерывном культивировании // Успехи в химии и химической технологии: сб. науч. тр., **XXXVI**:2. — М.: РХТУ им. Д. И. Менделеева, 2022. — 82–84.
4. Lumumba V.W., Sang D.K., Njoka G.M., Mpaine M.L., Musyimi D.K., Wandera J., Comparative Analysis of Cross-Validation Techniques: LOOCV, K-folds Cross-Validation, and Repeated K-folds Cross-Validation in Machine Learning Models. // American Journal of Theoretical and Applied Statistics, **13**:5 (2024), 127–137.

ВЫПРЯМЛЯЮЩИЕ ФРЕЙМЫ И ИНЪЕКТИВНОСТЬ ReLU-СЛОЕВ

С.Я. Новиков

nvks@ssau.ru

УДК 517.98

Доказаны две теоремы о связи т.н. выпрямляющих фреймов и инъективности ReLU-слоя. Полученные результаты могут стать основой для восстановления вектора-нейрона по его отражениям-импульсам в ReLU-слоях

Ключевые слова: полные системы, спарк, восстановление по неполным данным

Пусть $m \geq n$ и $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^m$ — набор векторов в $\mathbb{F}^n$, где $\mathbb{F}$ обозначает одно из числовых полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Оператор $Cx := \{\langle x, \varphi_i \rangle\}_{i=1}^m$ называется *оператором анализа*. Если $(m \times n)$ -матрица оператора C имеет полный ранг, то Φ называется фреймом для пространства $\mathbb{F}^n$. Другими словами, Φ является полной системой в $\mathbb{F}^n$, т.е. $\text{span } \Phi = \mathbb{F}^n$.

Эквивалентное определение фрейма: существуют константы $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для всех $x \in \mathbb{F}^n$,

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^m |\langle x, \varphi_i \rangle|^2 \leq B\|x\|^2.$$

Таким образом, оператор анализа C устанавливает изоморфизм между $\mathbb{F}^n$ и n -мерным подпространством $\text{Im } C \subset \mathbb{F}^m$.

С публикации работы [1] начались активные исследования фреймов с полным спарком, такие фреймы оказались удобными в качестве измерительных векторов для восстановления сигналов по неполным данным. Понятие спарка можно ввести для произвольной системы векторов в конечно-мерном пространстве $\mathbb{F}^n$.

Определение 1. Спарком s системы векторов Φ называется минимальное количество её линейно зависимых элементов. Система $\Phi \subset \mathbb{F}^n$ имеет полный спарк, если каждое её подмножество из n элементов линейно независимо, т.е. $s = n + 1$.

Представляя систему Φ в n -мерном пространстве над полем $\mathbb{F}$ в виде $n \times m$ -матрицы т.н. оператора синтеза

$$D : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n, \quad Dy := \sum_{i=1}^m y(i)\varphi_i,$$

столбцы которой являются векторами системы Φ , имеем:

$$s(\Phi) = \min\{\|x\|_0 : x \in \mathbb{F}^m, Dx = 0, x \neq 0\},$$

где $\|x\|_0$ — количество ненулевых координат вектора x .

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2025-179.

Новиков Сергей Яковлевич, д.ф.-м.н., профессор, Самарский университет (Самара, Россия); Sergey Novikov (Samara University, Samara, Russia)

Фреймы с полным спарком нашли применение в теории нейронных сетей, которая широко использует (нелинейную) функцию активации (Rectified Linear Unit), которая определяется равенством $ReLU(s) = \max(0, s)$, $s \in \mathbb{R}$ [2].

Функция активации определяет т. н. ReLU-слой (ReLU-layer):

$$\mathcal{L}_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad x \mapsto \{ReLU(\langle x, \varphi_i \rangle - \alpha_i)\}_{i=1}^m$$

для вектора смещения (bias) $\alpha \in \mathbb{R}^m$.

Если ReLU-слой инъективен, то его образ (импульсы) может быть использован для восстановления исходной информации (нейрона x .)

Для $x \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}^m$ определяется множество индексов

$$I_x^\alpha := \{1 \leq i \leq m : \langle x, \varphi_i \rangle \geq \alpha_i\}.$$

Определение 2. Фрейм Φ называется α -выпрямляющим на множестве $K \subseteq \mathbb{R}^n$ для вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$, если для всех $x \in K$ подмножество $\Phi_{I_x^\alpha} := \{\varphi_i\}_{i \in I_x^\alpha}$ полно в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. Пусть $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$; $\emptyset \neq K$ — открытое или строго выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Оператор $\mathcal{L}_\alpha$ инъективен на K тогда и только тогда, когда Φ — α -выпрямляющий фрейм на K .

Множество U называется *строго выпуклым* если для всех $x, y \in U$ и $\lambda \in (0, 1)$, $x_\lambda := (1 - \lambda)x + \lambda y \in \overset{\circ}{U}$, где $\overset{\circ}{U}$ — внутренность U .

Доказательство. Необходимость. Предположим, что Φ не является α -выпрямляющим. Существует $x \in K : (\varphi_i)_{i \in I_x^\alpha}$ не фрейм: существует

$$0 \neq r \in \text{span}(\varphi_i)_{i \in I_x^\alpha}^\perp.$$

Если K открыто, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$y_\pm := x \pm \varepsilon r \in K, \quad y_+ \neq y_-.$$

При этом $\mathcal{L}_\alpha y_+ = \mathcal{L}_\alpha y_-$, инъективности нет.

Предположим, что Φ не является α -выпрямляющим. Существует $x \in K : (\varphi_i)_{i \in I_x^\alpha}$ не фрейм. Используя определение строгой выпуклости находим

$$z \in K : z \neq x, \quad x_\lambda = (1 - \lambda)x + \lambda z \in \overset{\circ}{K}, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Заметим, что для любого i

$$|\langle x_\lambda, \varphi_i \rangle - \langle x, \varphi_i \rangle| \leq \lambda \|x - z\| \sqrt{B}.$$

При соответствующим выборе λ доказательство для открытого множества переносится на выпуклое заменой x на x_λ .

Достаточность. Пусть фрейм Φ α -выпрямляющий на множестве K , т.е. $\forall x \in K$, $\Phi_{I_x^\alpha}$ — фрейм. Если $\mathcal{L}_\alpha x = \mathcal{L}_\alpha y$ для $x, y \in K$, то

$$\langle x, \varphi_i \rangle = \langle y, \varphi_i \rangle, \quad i \in I_x^\alpha \cap I_y^\alpha.$$

1). K — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы открытый шар $B_\varepsilon^\circ(x) \subset K$. Предположим, что $x \neq y$. Если $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{\|x - y\|}$, то

$$x_\delta := (1 - \delta)x + \delta y \in B_\varepsilon^\circ(x) \subset K.$$

Пусть $i \in I_{x_\delta}^\alpha$, т.е. $\langle x_\delta, \varphi_i \rangle \geq \alpha_i$. Интервал, которому принадлежит $\langle x_\delta, \varphi_i \rangle$, находится правее точки α_i . Поэтому

$$\text{если } \langle x_\delta, \varphi_i \rangle > \alpha_i, \text{ то } \langle x, \varphi_i \rangle > \alpha_i \text{ и } \langle y, \varphi_i \rangle > \alpha_i;$$

$$\text{если } \langle x_\delta, \varphi_i \rangle = \alpha_i, \text{ то } \langle x, \varphi_i \rangle = \langle y, \varphi_i \rangle = \alpha_i.$$

Следовательно, $I_{x_\delta}^\alpha \subseteq I_x^\alpha \cap I_y^\alpha$.

Так как $x_\delta \in K$, то $\Phi_{I_{x_\delta}^\alpha}$ — фрейм $\Rightarrow \Phi_{I_x^\alpha \cap I_y^\alpha}$ — фрейм.

Для всех $i \in I_x^\alpha \cap I_y^\alpha$ имеем равенства $\langle x, \varphi_i \rangle = \langle y, \varphi_i \rangle$, из которых следует что $x = y$.

2). K — выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Для $\lambda \in (0, 1)$ имеем

$$x_\lambda = (1 - \lambda)x + \lambda y \in K,$$

поэтому $\Phi_{I_{x_\lambda}^\alpha}$ — фрейм.

Повторяя рассуждения 1), получаем, что $I_{x_\lambda}^\alpha \subseteq I_x^\alpha \cap I_y^\alpha$, отсюда $\Phi_{I_x^\alpha \cap I_y^\alpha}$ — фрейм $\Rightarrow x = y$. Теорема доказана.

Следствие Пусть K — выпуклое или открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Если фрейм Φ имеет полный спарк, то Φ является α -выпрямляющим на K тогда и только тогда, когда $|I_x^\alpha| \geq n$ для всех $x \in K$.

α -выпрямляющие фреймы зависят от множества K .

Теорема 2. Если $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^m$ — α -выпрямляющий фрейм в $\mathbb{R}^n$, то $m \geq 2n$.

Для единичного шара любой нормированный фрейм является α -выпрямляющим, если $\alpha = -(1, \dots, 1)^t$.

Нормированный базис α -выпрямляющий для единичного шара $\Leftrightarrow \alpha = -(1, \dots, 1)^t$.

Доказательство. Выберем $x \in \mathbb{R}^n$ так, чтобы $\langle x, \varphi_i \rangle \neq 0$ для всех i , и $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Определим разбиение множества индексов:

$$I_x^+ := \{i : \langle x, \varphi_i \rangle > 0\}, \quad I_x^- := \{i : \langle x, \varphi_i \rangle < 0\}.$$

Пусть

$$t^* := \max_{1 \leq i \leq m} \frac{\alpha_i}{\langle x, \varphi_i \rangle}.$$

Для $t > t^* > 0$ имеем равенства

$$I_{tx}^\alpha = I_x^+ \text{ и } I_{-tx}^\alpha = I_x^-.$$

Найдено два вектора $u := tx$ и $v := -tx$ в $\mathbb{R}^n$ такие, что $I_u^\alpha \cap I_v^\alpha = \emptyset$. Если Φ — α -выпрямляющий фрейм в $\mathbb{R}^n$, то $\Phi_{I_u^\alpha}$ и $\Phi_{I_v^\alpha}$ должны быть полными в $\mathbb{R}^n$, поэтому $|I_u^\alpha| \geq n$ и $|I_v^\alpha| \geq n$, $m \geq 2n$.

Если все векторы фрейма $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^m$ имеют единичную норму (такой фрейм называют нормированным), и $x \in B_{\mathbb{R}^n}$, то $\langle x, \varphi_i \rangle \geq -1$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Если нормированный базис α -выпрямляющий для $B_{\mathbb{R}^n}$, то $I_x^\alpha = \{1, 2, \dots, n\}$, $\langle x, \varphi_i \rangle \geq \alpha_i$ для любого $x \in B_{\mathbb{R}^n}$ и для $i = 1, 2, \dots, n$. В частности, $\langle -\varphi_i, \varphi_i \rangle = -1 \geq \alpha_i$.

Теорема доказана.

Литература

1. Alexeev B., Cahill J., Mixon D.G. Full Spark Frames // arXiv>math>/1110.3548 (2010).
2. Haider D., Ehler M., Balazs P. Injectivity of ReLU-layers: Perspectives from Frame Theory // arxiv.org/pdf/2406.15856 (2024).

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МЕТАВСЕЛЕННЫХ

Р.А. Олин, М.Е. Федина, В.Ю. Живцов

olinroman@mail.ru, phedina@ssau.ru, zhivtsov@samsmu.ru

УДК 519.6

В работе рассматриваются возможности метавселенных как инструмента повышения интерактивности, доступности и практико-ориентированности образования. Анализируется влияние иммерсивных цифровых сред на мотивацию учащихся, развитие навыков и реализацию инклюзивных подходов. Определены технологические и организационные ограничения, препятствующие широкому внедрению подобных решений в образовательную практику.

Ключевые слова: метавселенная, иммерсивные технологии, виртуальная реальность, информационная безопасность

Метавселенные представляют собой объединённое виртуальное трёхмерное пространство, в котором пересекаются цифровой и физический миры, а пользователи взаимодействуют через свои аватары в режиме реального времени, полностью погружаясь в единую цифровую среду. Предполагается, что новые иммерсивные форматы учебной деятельности сделают занятия более интерактивными, эффективными и увлекательными. Фактически речь идёт о следующем этапе развития интернета, где участники могут взаимодействовать в общем цифровом пространстве, преодолевая географические расстояния и ограничения традиционных форм общения. Создание виртуальных классов и кампусов, реалистично имитирующих школьную и вузовскую среду, уже рассматривается как одно из ключевых направлений развития современных образовательных технологий. [1]

Метавселенные являются будущим трендом педагогики и способны существенно повысить вовлечённость обучающихся, развить у них практические навыки и индивидуализировать образовательный опыт. Вместе с тем, ключевыми препятствиями на пути широкому внедрению являются высокая стоимость оборудования, ограниченная техническая доступность, недостаточная готовность преподавателей, а также проблемы защиты персональных данных пользователей.

Опыт массового дистанционного обучения через обычные видеоконференции показывает наступление быстрой усталости от длительного экранного общения, снижается мотивация и концентрация внимания, отсутствует живое социальное взаимодействие. В виртуальной среде метавселенной ученики и преподаватели, находящиеся физически в разных местах, могут собираться в едином пространстве и ощущать эффект присутствия рядом с другими участниками. Вместо пассивного наблюдения за статичными окнами видеочата предоставляется возможность активного участия в виде совместных дискуссий и групповой работы с перемещением по виртуальному

Олин Роман Александрович, доцент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П.Королева (Самара, Россия); Olin Roman Alexandrovich (Samara National Research University, Samara, Russia)

Федина Мария Ефимовна к.ф.м.н, доцент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева (Москва, Россия); Fedina Maria Efimovna (Samara National Research University, Samara, Russia)

Живцов Владимир Юрьевич, к.пед.н., проректор по административной, социальной и воспитательной работе, Самарский государственный медицинский университет (Самара, Россия); Zhivtsov Vladimir Yuryevich (Samara State Medical University, Samara, Russia)

классу. Подобный формат значительно усиливает интерес, позволяя ученикам ощущать себя частью единого коллектива даже на расстоянии. [2] Преподаватели получают возможность расширенного взаимодействия с аудиторией, недоступном при традиционном онлайн-общении.

Помимо повышения мотивации, технология метавселенных открывает новые горизонты для практико-ориентированного обучения. Виртуальные лаборатории и симуляторы, развёрнутые в метaprостранстве, позволяют выполнять такие учебные эксперименты и практические задания, которые в реальности были бы слишком опасными, дорогостоящими или попросту невыполнимыми. Более того, процессы, требующие длительного наблюдения, в виртуальной среде могут быть ускорены или визуализированы в сжатом виде, позволяя в рамках одного занятия проследить явление, которое в реальности разворачивается продолжительное время. Снятие физических и финансовых ограничений в виртуальных практикумах расширяет возможности учащихся приобретать опыт методом проб и ошибок, многократно повторяя действия для совершенствования навыков, не опасаясь реального ущерба оборудованию или здоровью.

Студенты инженерных направлений получают возможность работать с моделями сложных устройств или проводить виртуальные краш-тесты. Метавселенная сокращает разрыв между учебной средой и реальным производством, позволяя приобретать опыт в условиях, максимально приближенных к практике.

Иммерсивная виртуальная среда в ходе изучения иностранных языков способна предоставить глубокий контекст и интенсивную языковую практику, недостижимые в рамках традиционных занятий. Вместо условного разыгрывания диалогов на определённые темы в классе студенты перемещаются в цифровой симулятор и пробуют общаться на изучаемом языке с виртуальными персонажами на основе искусственного интеллекта. Достигается погружение учащихся в реалистичную ситуацию, где необходимо применять разговорные навыки в контексте, что значительно повышает усвоение лексики и уверенность в разговорной речи. Тренировки возможно продолжать вне аудиторных занятий, группа студентов способна собраться в любое время в виртуальном пространстве, чтобы поговорить между собой или с виртуальными персонажами, если реальные собеседники недоступны. [3]

Метавселенные за счёт использования аватаров создают дополнительные условия для реализации инклюзивного образования и нивелирования визуальных различий, что помогает студентам с инвалидностью чувствовать себя на равных с другими обучающимися. Виртуальная среда позволяет адаптировать представление учебного материала к индивидуальным потребностям через анализ когнитивных затруднений и динамики освоения содержания. [4]

Качественное образование потенциально становится более доступным за счёт глобального характера метавселенных. Учащиеся из отдалённых регионов, находящиеся на домашнем обучении или не имеющие возможности очно посетить занятие, могут присутствовать в виртуальном виде на дисциплинах у преподавателей лучших школ и вузов.

Несмотря на развитие сетевой инфраструктуры и удешевление оборудования, на сегодняшний день технический порог вхождения остаётся достаточно высоким. Также серьёзным аспектом является обеспечение безопас-

ности данных и приватности участников в виртуальных мирах. Платформы собирают и обрабатывают значительные объёмы персональной информации о пользователях, от характеристик аватара и манеры общения до биометрических показателей и следов цифровой активности. [5] Иммерсивные пространства могут быть использованы злоумышленниками для киберпреступлений и реализации различных векторов атак. Наибольшие риски возникают для несовершеннолетних, которые не обладают достаточным опытом в сфере цифровой безопасности и особо восприимчивы к техникам социальной инженерии.

В связи с этим необходима проработка этических и правовых норм для виртуальных образовательных платформ, а также внедрение технических решений на основе блокчейна для безопасной верификации субъектов виртуальной среды.

Метавселенные формируют значимый потенциал для совершенствования образовательных процессов, однако их применение требует продуманной педагогической интеграции и надёжных механизмов защиты данных. При дальнейшем развитии инфраструктуры такие виртуальные среды могут занять устойчивое место в системе образования и способствовать появлению новых методических подходов.

Литература

1. *Sripan T., Jeerapattanatorn P.*, Metaverse-based learning: A comprehensive review of current trends, challenges, and future implications [Электронный ресурс] // Contemporary Educational Technology, **17**:3 (2025), art. no. ep584. — URL: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1481639.pdf> (дата обращения: 19.10.2025).
2. *Zhang X., Chen Y., Hu L., Wang Y.*, The metaverse in education: Definition, framework, features, potential applications, challenges, and future research topics [Электронный ресурс] // Front. Psychol., **13** (2022), art. no. 1016300. — URL: <https://www.frontiersin.org/journals/psychology/articles/10.3389/fpsyg.2022.1016300> (дата обращения: 25.10.2025).
3. *Zhang X., Chen Y., Hu L., Wang Y.*, A systematic review on the metaverse-based blended English learning [Электронный ресурс] // Front. Psychol., **13** (2022), art. no. 1087508. — URL: <https://www.frontiersin.org/journals/psychology/articles/10.3389/fpsyg.2022.1087508> (дата обращения: 25.10.2025).
4. *Altinay F., Tlili A., Altinay Z., Dagli G.* Meta-In or Meta-Out of Students with Special Needs: A Systematic Review on the Use of Metaverse in Special Education [Электронный ресурс]. — Application of the Metaverse in Education, 2024. — URL: https://www.researchgate.net/publication/380394333_Meta-In_or_Meta-Out_of_Students_with_Special_Needs_A_Systematic_Review_on_the_Use_of_Metaverse_in_Special_Education (дата обращения: 27.10.2025).
5. *Бондаренко В.В.* Угрозы безопасности в метавселенных и механизмы их нейтрализации / В. В. Бондаренко, М. Н. Осипов, К. В. Протасов // Актуальные проблемы радиоэлектроники и телекоммуникаций: Материалы Всероссийской научно-технической конференции, Самара, 20–23 мая 2025 года. — Самара: ООО «АРТЕЛЬ», 2025. — 209–211. — EDN UGIPHV.

**ЗАДАЧА N ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ДАРБУ С ДВУМЯ
ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ
КООРДИНАТАХ И ТРИВИАЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ
ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ОРДИНАТЕ ОТ ИСКОМОЙ
ФУНКЦИИ**

С.В. Подклетнова
podkletnova.sv@ssau.ru

УДК 517.518

Доказана теорема существования и единственности решения задачи N для уравнения Эйлера-Дарбу с двумя линиями вырождения при условии тривиальности коэффициента при производной по ординате от искомой функции. Решение задачи получено в явном виде при определённых условиях, наложенных на параметры уравнения. Доказана непрерывность полученного решения.

Ключевые слова: математика, дифференциальные уравнения, краевая задача

Задача N. Найти решение уравнения

$$(\xi \cdot \operatorname{sgn} \xi - \eta) \cdot u_{\xi\eta} \cdot \operatorname{sgn} \xi - \beta \cdot u_{\xi} = 0 \quad (\beta > 0)$$

на множестве $G_h = G_+ \cup G_-$, где

$$G_+ = \{(\xi, \eta) | 0 < \xi < \eta < h\},$$

$$G_- = \{(\xi, \eta) | 0 < -\xi < \eta < h\},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{\eta-\xi \rightarrow +0} (\eta - \xi)^{\beta} (u_{\xi} - u_{\eta}) = \nu_+(\xi), \quad \xi \in (0, h),$$

$$\lim_{\eta+\xi \rightarrow +0} (\eta + \xi)^{\beta} (u_{\xi} + u_{\eta}) = \nu_-(\xi), \quad \xi \in (-h, 0)$$

и условиям сопряжения

$$\lim_{\xi \rightarrow -0} u_-(\xi, \eta) = A(\eta) \cdot \lim_{\xi \rightarrow +0} u^+(\xi, \eta) + \gamma(\eta), \quad \eta \in [0, h],$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -0} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\eta}^{\xi} (\xi - t)^{-\lambda} u_-(t, \eta) dt = B(\eta) \cdot \lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\xi}^{\eta} (t - \xi)^{-\lambda} u^+(t, \eta) dt + \delta(\eta),$$

$\eta \in (0, h)$, $0 < \lambda < 1$.

Теорема. При $0 < \lambda, \beta < 1$ существует единственное решение задачи N, которое выражается формулами

$$\begin{aligned} u^+(\xi, \eta) = & \frac{1}{2(A(\eta) - B(\eta))} \int_0^{\eta} \nu_-(-t)(\eta - t)^{-\beta} (1 + \eta^{\lambda} t^{-\lambda}) dt + \\ & + \frac{B(\eta)}{2(A(\eta) - B(\eta))} \int_0^{\eta} \nu_+(t)(\eta - t)^{-\beta} (1 + \eta^{-\lambda} t^{-\lambda}) dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\xi} \nu_+(t)(\eta - t)^{-\beta} dt - \frac{\gamma(\eta) - \delta(\eta)\eta^{\lambda}}{A(\eta) - B(\eta)}; \end{aligned}$$

Подклетнова Светлана Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Svetlana Podkletnova (Samara University, Samara, Russia)

$$\begin{aligned}
u_-(\xi, \eta) = & \frac{A(\eta)}{2(A(\eta) - B(\eta))} \int_0^\eta \nu_-(-t)(\eta - t)^{-\beta}(1 + \eta^\lambda t^{-\lambda})dt + \\
& + \frac{A(\eta)B(\eta)}{2(A(\eta) - B(\eta))} \int_0^\eta \nu_+(t)(\eta - t)^{-\beta}(1 + \eta^{-\lambda}t^{-\lambda})dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^\xi \nu_-(-t)(\eta + t)^{-\beta}dt - \frac{B(\eta)\gamma(\eta) - A(\eta)\delta(\eta)\eta^\lambda}{A(\eta) - B(\eta)},
\end{aligned}$$

если $\nu_+(0) \in C_{[0,h]}^1$, $\nu_-(0) \in C_{[-h,0]}^1$, $\delta(\xi) \in C_{[0,h]}^1$, $\gamma(\xi) \in C_{[0,h]}^1$, $A(\eta) \in C_{[0,h]}$, $B(\eta) \in C_{[0,h]}$, $A(\eta) - B(\eta) \neq 0$.

И это решение непрерывно в каждой из замкнутых областей $\bar{G}_+$ и $\bar{G}_-$.

Литература

1. Поджлетнова С.В. Ряд краевых задач для уравнения Эйлера-Дарбу с двумя линиями вырождения // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 4 октября – 8 октября 2023 г.). В 2 томах. — Уфа: Аэтерна, 2023. — 103–105.
2. Поджлетнова С.В. Задача Коши для некоторых значений параметров уравнения Эйлера-Дарбу // 51-я научная конференция СГПУ. — 1997. — 66–75.
3. Поджлетнова С.В. Специальные классы решений для уравнения Эйлера-Дарбу с двумя линиями вырождения // Современные проблемы теории функций и их приложения: сборник статей. — Саратов: Саратовский университет, 2024. — 206–214.
4. Волкодав В.Ф., Томина Е.И. О единственности решения ряда краевых задач для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. — деп. В ВИНТИ, 547–В93.
5. Волкодав В.Ф., Сергеевская И.М. Новые краевые задачи для дифференциальных уравнений с двумя перпендикулярными линиями вырождения / Самарск. гос. пед. ин-т. — Самара, 1994. — 14 с. — Деп. В ВИНТИ 10.01.94. № 21–В94.
6. Волкодав В.Ф., Бушков С.В., Илюшина Ю.А. Для уравнения гиперболического типа задача с производными по нормам на двух частях границы рассматриваемого множества и единственность её решения // Труды Всероссийской научной конференции (26–28 мая 2004 г.). Часть 3, Дифференциальные уравнения и краевые задачи, Матем. моделирование и краев. задачи. — СамГТУ, Самара, 2004. — 43–48.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука. 1965. — 297 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — Москва: Физматгиз, 1962.
9. Поджлетнова С.В. Рекуррентные тождества для двух специальных функций гипергеометрического типа // Вестник Самарского университета. Естественнаучная серия, **29**:3 (2023), 37–56.
10. Ферье Ж.К. де, Кемпбелл Р., Петъо Г., Фогель Т. Функции математической физики. — М.: Физматгиз, 1963. — 102 с.
11. Поджлетнова С.В. Интегральные представления гипергеометрических функций двух независимых аргументов // XX Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». XIV Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». — Ростов н/Д, 2024. — 69.

ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ КАРДИОСТИМУЛЯТОРА

Р.И. Рахимова

rakhimova_ri@mail.ru

УДК 681.5.015

В работе рассматривается модель кардиостимулятора, основанная на модифицированном уравнении Ван дер Поля. Построена дискретная стохастическая модель, представленная разностными уравнениями в пространстве состояний. Для оценки вектора состояния модели применяется алгоритм расширенного фильтра Калмана.

Ключевые слова: кардиостимулятор, уравнение Ван дер Поля, фильтр Калмана, трансмембранный потенциал

Введение

Основы моделирования электрической активности сердца были заложены еще в начале 20-го века нидерландским физиологом В.Эйнтховеном, признанным основоположником электрокардиографии [1]. Математическую модель сердца, в которой сердцебиение рассматривается как релаксационное колебание, разработали Ван дер Поля и Ван дер Марк [2]. Данная идея получила дальнейшее развитие в серии исследований, где проводящая система сердца моделируется как совокупность связанных нелинейных релаксационных осцилляторов [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

В данной работе рассматривается задача оценки параметров математической модели сино-атриального узла (САУ) — главного кардиостимулятора сердца [10].

Основой многих алгоритмов управления динамическими системами служит принцип обратной связи, требующий знания полного вектора состояния. Однако на практике данное условие выполняется не всегда. Например, при регистрации электрической активности сердца доступны для измерения лишь потенциалы узлов, тогда как скорости их изменения остаются ненаблюдаемыми напрямую. Для восстановления полного вектора состояния по измерениям и при отсутствии шумов применяют наблюдатели состояния [11]. В случае неполных зашумленных измерений целесообразно применять алгоритмы, основанные на методе фильтра Калмана [12].

Целью данной работы является построение дискретной стохастической модели кардиостимулятора, представленной в пространстве состояний, и реализация алгоритма оценивания вектора состояния модели на основе расширенного фильтра Калмана.

1. Математическая модель кардиостимулятора на основе уравнения Ван дер Поля

Рассмотрим известное уравнение Ван дер Поля, описывающее простейший осциллятор с нелинейным затуханием:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha(x^2 - \mu)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (1)$$

Рахимова Римма Ильгизаровна, аспирант 2-года обучения кафедры высшей математики Ульяновского государственного педагогического университета имени И.Н. Ульянова, Rimma Rakhimova (Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia)

где α и μ — параметры модели.

В [5] для моделирования работы кардиостимулятора предложено модифицированное уравнение Ван дер Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha(x^2 - \mu)\frac{dx}{dt} + \frac{x(x+d)(x+e)}{de} = 0, \quad (2)$$

где d, e, μ, α — положительные параметры и $\mu < d$.

Для построения модели в пространстве состояний введем в рассмотрение вектор состояния

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } x_1 = x, \quad x_2 = \frac{dx}{dt} = v_x.$$

Используя уравнение (2), запишем модель в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1^2 \cdot x_2 + \alpha \mu x_2 - \frac{1}{de} x_1^3 - \frac{(d+e)}{de} x_1^2 - x_1, \end{cases} \quad (3)$$

где x_1 — трансмембранный потенциал узла x_1 , x_2 — скорость его изменения.

Модель (3) является нелинейной и может быть представлена в общем виде:

$$dX(t) = f(X(t))dt, \quad (4)$$

где $X(t)$ — вектор состояния, $f(\cdot)$ — нелинейная вектор-функция.

Дискретизируя (4) во временной области, получим дискретную модель

$$X_{k+1} = \phi(X_k), \quad (5)$$

где $\phi(X_k) = X_k + f(X_k)\Delta t$, X_k — вектор состояния в дискретные моменты времени k , Δt — период дискретизации.

Предположим, что величина x_1 наблюдается на фоне помехи v_k , являющейся гауссовской случайной последовательностью.

Тогда уравнение наблюдения в дискретном времени запишем в следующем виде:

$$z_k = H_k X_k + v_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (6)$$

где $H_k = [1 \ 0]$, $v_k \sim N(0, R_k)$.

Требуется по зашумленным неполным измерениям z_k вычислить оценки вектора состояния X .

2. Алгоритм оценивания вектора состояния на основе расширенного фильтра Калмана

Для решения задачи оценивания вектора состояния X применим алгоритм расширенного фильтра Калман [12].

Предварительно необходимо линеаризовать нелинейную функцию $\phi(X_k)$ следующим образом:

$$\phi(X_k) \approx \text{Jacobian}(\phi(X_k))X_k = F_k X_k.$$

Полученную матрицу F_k будем использовать в алгоритме расширенного фильтра. Алгоритм оценивания состоит из следующих шагов:

- 1) Задать начальное состояние системы и соответствующую ковариационную матрицу

$$\hat{X}_0 = E[X_0] \quad (7)$$

$$\hat{P}_0 = E[(X_0 - \hat{X}_0)(X_0 - \hat{X}_0)^T]. \quad (8)$$

- 2) Вычислить прогнозируемую оценку вектора состояния и соответствующую ковариационную матрицу ошибки оценки

$$\hat{X}_{k+1|k}^- = \phi(\hat{X}_k). \quad (9)$$

$$P_{k+1|k}^- = F_k(\hat{X}_k)P_kF_k^T(\hat{X}_k). \quad (10)$$

- 3) Вычислить коэффициент усиления Калмана

$$K_k = P_{k+1|k}^- H^T (H P_{k+1|k}^- H^T + R_k)^{-1}. \quad (11)$$

- 4) Обновить оценку вектора состояния и соответствующую ковариационную матрицу ошибки оценки

$$\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_{k+1|k}^- + K_k(z_k - H\hat{X}_{k+1|k}^-), \quad (12)$$

$$\hat{P}_{k+1} = (I - K_k H_k)P_{k+1|k}^- (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k. \quad (13)$$

- 5) Повторять шаги 2) – 4) для $k = 1, \dots, K$.

На рис. 1 и 2 показаны графики трансмембранного потенциала x и зашумленных измерений, полученных при заданных значениях параметров модели $\alpha = 1.0$, $\mu = 1.0$, $d = 3.0$, $e = 3.5$.

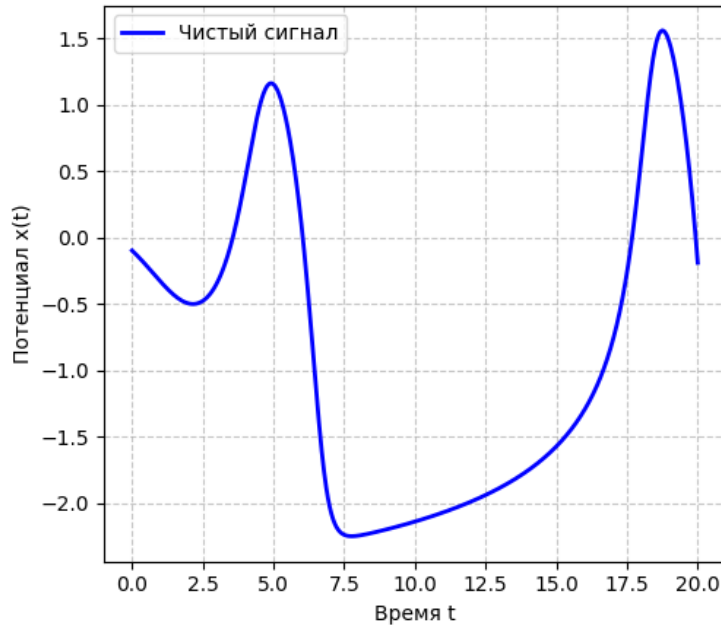


Рис. 1. График трансмембранного потенциала x

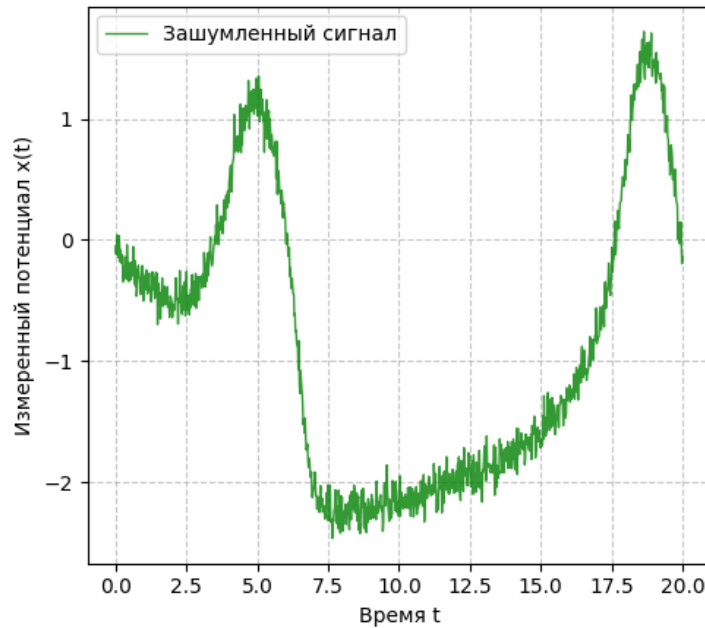


Рис. 2. Зашумленные измерения ($R_k = 0.01$)

Заключение

В работе построена дискретная стохастическая модель кардиостимулятора на основе модифицированного уравнения Ван дер Поля. Для оценки вектора состояния по неполным зашумленным измерениям применен расширенный фильтр Калмана. Полученные результаты могут быть использованы для моделирования работы кардиостимулятора. Дальнейшие исследования будут направлены на решения задачи идентификации параметров модели.

Литература

1. Einthoven W.G., Fahr G., de Waart A.A.J., Über die Richtung und die manifeste Größe der Potentialschwankungen im menschlichen Herzen und über den Einfluss der Herzlage auf die Form des Elektrokardiogramms // Pflüger's Archiv für die gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere, **150**:6-8 (1913), 275–315.
2. Van der Pol B., van der Mark J., The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart // Ser. 7: The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and J. of Science, **6**:38 (1928), 763–775.
3. Nazari S., Heydari A., Khaligh J., Modified modeling of the heart by applying nonlinear oscillators and designing proper control signal // Applied Mathematics, **4** (2013), 972–978.
4. Ryzhii E., Ryzhii M., Modeling of heartbeat dynamics with a system of coupled nonlinear oscillators // Biomedical informatics and technology: 1st Intern. conf. on biomedical informatics and technology: ACBIT 2013 (Aizu-Wakamatsu, Japan, Sept. 16-17, 2013): Revised selected papers. B.; Hdb. — Springer, 2014. — 66–75.
5. Grudziński K., Zebrowski J.J., Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators // Physica A, **336**:1–2 (2004), 153–162.
6. Zebrowski J.J., Grudziński K., Buchner T., Kuklik P., Gac J., Gielera G., Sanders P., Baranowski R., Nonlinear oscillator model reproducing various phenomena in the dynamics of the conduction system of the heart // Chaos, **17**:1 (2007), art. no. 015121.

7. *Gois S.R.F.S.M., Savi M.A.*, An analysis of heart rhythm dynamics using a three-coupled oscillator model // *Chaos, Solitons & Fractals*, **41**:5 (2009), 2553–2565.
8. *Петров В.С., Осунгов Г.В.*, Влияние пассивных элементов на синхронизацию осцилляторных ансамблей // *Изв. высш. учеб. заведений. Прикладная нелинейная динамика*, **18**:3 (2010), 46–59.
9. *Das S., Maharatna K.*, Fractional dynamical model for the generation of ECG like signals from filtered coupled Van-der Pol oscillators // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, **112**:3 (2013), 490–507.
10. *Мурашко В.В., Струтынский А.В.* Электрокардиография: учеб.пособ. 14-е изд. — М.: МЕДпресс-информ, 2017. — 360 с.
11. *Виноградова М.С., Канатников А.М., Ткачева О.С.*, Наблюдатель состояния для модели кардиостимулятора на основе уравнения Ван дер Поля // *Математика и математическое моделирование*, 4 (2020), 16–32.
12. *Grewal M.S., Andrews A.P.* Kalman filtering: Theory and practice using MATLAB. — New Jersey: Prentice Hall, 2001. — 401 p.

ПРИМЕНЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО АЛГОРИТМА КАЧМАЖА ПРИ ОБУЧЕНИИ НЕЙРОСЕТЕЙ

Т.П. Рубцова

rubcova.tp@ssau.ru

УДК 519.677

В данной работе рассматривается применение регуляризованного алгоритма Качмажа для обучения моделей нейронных сетей. Приводится обзор теоретических основ метода Качмажа и анализируется его связь со стохастическим градиентным методом. В работе обосновывается необходимость регуляризации для повышения устойчивости обучения при наличии шума и некорректно обусловленных задач. Экспериментальные результаты представленного алгоритма демонстрируют, что регуляризованный алгоритм Качмажа обеспечивает стабильное снижение ошибки и конкурентоспособную точность на тестовых задачах.

Ключевые слова: нейронные сети; метод Качмажа; регуляризация; алгоритмы обучения; стохастический градиент; сходимость; машинное обучение

Одним из ключевых этапов обучения искусственных нейронных сетей является применение метода обратного распространения ошибки (backpropagation), который обеспечивает эффективную настройку весовых коэффициентов модели на основе градиентного спуска. Суть данного метода заключается в поэтапном вычислении градиентов функции потерь по параметрам сети посредством применения правила цепного дифференцирования, что позволяет корректировать веса в направлении минимизации ошибки между предсказанным и истинным значением целевой переменной. Использование обратного распространения ошибки делает возможным обучение многослойных нейронных архитектур, включая глубокие сети, благодаря эффективной передаче информации о величине и направлении ошибки от выходного слоя к входным.

Несмотря на простоту и универсальность, классическая реализация метода обратного распространения ошибки сталкивается с рядом ограничений, особенно при обучении глубоких архитектур. Основной проблемой является затухание или взрыв градиентов, возникающий при многократном применении правила цепного дифференцирования, что приводит к неустойчивости обучения и медленной сходимости.

Многие практические и теоретические проблемы оптимизации характеризуются многомерностью пространства поиска. Эти проблемы включают в себя NP-полные задачи комбинаторной оптимизации, идентификации сложных структур или многомерной оптимизации функций. В связи с этим довольно часто для решения практических задач применяются эвристические методы, являющиеся более гибкими и эффективными и требующие гораздо меньших вычислительных затрат, несмотря на то, что они могут и не обеспечивать достижения глобального оптимального решения.

Одним из перспективных в этом смысле является итеративные проекционные методы и в частности алгоритм Качмажа. Изначально алгоритм

Рубцова Татьяна Павловна, Самарский университет (Самара, Россия); Tatyana Rubtsova (Samara University, Samara, Russia)

предложенный С. Качмажем в 1937 году для последовательного решения систем линейных уравнений [1], был переоткрыт в разных областях, в том числе как правило Widrow-Hoff для обучения однослойных нейронных сетей с минимизацией среднеквадратичной ошибки. Алгоритм Качмажа по сути выполняет последовательную корректировку весов на каждом шаге, проецируя текущее решение на гиперплоскость, заданную отдельным обучающим образцом [2].

Идеи алгоритма Качмажа могут быть использованы на различных этапах обучения нейросетей. Например, один из вариантов — обучение выходного слоя нейронной сети методом Качмажа при фиксированных внутренних весах, либо чередование шагов проекционного обновления с этапами пересчета ошибки через скрытые слои.

В случае линейного нейрона это эквивалентно классическому правилу наименьших квадратов — итеративному приближению к решению уравнения $Ax = b$. Таким образом, этот подход позволяет получать сходимость при обработке больших данных.

В исследованиях отмечается, что по своей сути для нелинейного случая итеративная процедура применения алгоритмов, основанных на алгоритме Качмажа эквивалентна шагу стохастического градиентного метода, то есть обработке одного примера с последующим обновлением весов, но с той разницей, что шаг выбирается не малым постоянным, а адаптивно — исходя из требования точного удовлетворения текущего уравнения (или его наилучшего удовлетворения в регуляризованном смысле).

Алгоритм Качмажа и его модификации в контексте нейронных сетей представляет собой альтернативу классическим алгоритмам обратного распространения ошибки, особенно в задачах с большими разреженными данными или требующих интерпретируемости шагов обучения. Современные исследования направленные на объединение преимуществ проекционных методов и стохастической аппроксимации, а также реализации распараллеливания алгоритма Качмажа для ускорения вычислений на многопроцессорных системах.

Прямое использование алгоритма Качмажа для обучения без модификаций может столкнуться с трудностями на реальных данных: если обучающая выборка содержит шум или система уравнений переопределена и несовместна, метод может не сходиться или сходиться к решению с большим ошибком.

Для решения этой проблемы применяется регуляризация — введение дополнительного устойчивого члена, улучшающего свойства сходимости. В градиентных методах регуляризация обычно эквивалентна добавлению к функции ошибки штрафного слагаемого (например, L^2 -норма весов для Ridge-регрессии). В алгоритме Качмажа аналогичного эффекта можно достичь несколькими способами.

Один из подходов — расширение системы уравнений за счет добавления фиктивных уравнений, накладывающих ограничение на норму решения (метод Тихонова). В работе Жданова и Иванова [3] предложен проекционно-регуляризирующий алгоритм, в котором метод Качмажа применяется к расширенной системе нормальных уравнений $(A^T A + \alpha I)x = A^T b$.

Такой регуляризованный алгоритм Качмажа доказал свою эффективность при решении некорректно обусловленных задач.

Альтернативным подходом является введение итерационную формулу

Качмажа малого положительного параметр β в знаменатель обновления, препятствующий избыточно большим коррекциям.

Рассмотрим применение модификации алгоритма Качмажа обучения нейронной сети в задачах регрессии.

Пусть дана обучающая выборка (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, где x_i — входной вектор, y_i — целевой выход (действительное число для задачи регрессии или вектор вероятностей для задачи классификации).

Обозначим через $f(w, x)$ выход нейронной сети с параметрами (весами) w на объекте x .

Классический подход обучения состоит в минимизации эмпирической ошибки. Ошибка регрессии представляет собой меру расхождения между предсказанными значениями модели и истинными значениями целевой переменной. В общем виде функция потерь для задачи регрессии определяется выражением:

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell(f(w, y_i), y_i),$$

где n — количество наблюдений, y_i — истинное значение, $f(w, y_i)$ — предсказанное моделью значение, а $\ell(f(w, y_i), y_i)$ — функция потерь для одного наблюдения.

Задача оптимизации решается с помощью градиентных методов.

Алгоритм Качмажа, напротив, решает систему уравнений $f(w, x_i) = y_i$ последовательно по i . Требуется построить линейную модель:

$$\hat{y}_i = w^T x_i,$$

где $w \in \mathbb{R}^m$ — вектор весовых коэффициентов, подлежащих обучению.

Критерием качества модели выступает функция среднеквадратичной ошибки (Mean Squared Error, MSE):

$$E(w) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (y_i - w^T x_i)^2.$$

Задача обучения формулируется как задача минимизации данной функции потерь:

$$\min_w E(w).$$

Для нахождения оптимального вектора весов используется метод стохастического градиентного спуска, при котором вектор w обновляется на каждом шаге :

$$w^{(k+1)} = w^{(k)} + \gamma (y_i - w^{(k)T} x_i) x_i,$$

где $\gamma > 0$ — коэффициент скорости обучения (шаг градиентного спуска).

Таким образом, алгоритм реализует адаптивную настройку весов модели на основе текущей ошибки прогноза. При этом каждое новое наблюдение корректирует веса в направлении уменьшения среднеквадратичного отклонения между предсказанными и истинными значениями. Конвергенция метода достигается при выборе γ в пределах, обеспечивающих устойчивость итерационного процесса:

$$0 < \gamma < \frac{2}{\lambda_{\max}(R_x)},$$

где $\lambda_{\max}(R_x)$ — наибольшее собственное значение корреляционной матрицы $R_x = \mathbb{E}[x_i x_i^T]$.

Для последовательного прохода по всем уравнениям процедура повторяется циклически или в случайном порядке (случайный Качмаж).

В общем случае многослойной сети функция $f(w, x)$ нелинейна по w . Применим следующий подход: рассматриваем выход сети для фиксированного набора параметров как функцию, зависящую линейно от выходных весов последнего слоя (при фиксированных значениях предшествующих слоев). Тогда на этапе обучения последнего слоя можно использовать шаг Качмажа, а градиентным методом настраивать внутренние слои.

На каждой эпохе обучения возможно чередовать два шага:

1. Проекционное обновление выходных весов сети на каждом обучающем примере по очереди с помощью шага Качмажа.
2. Градиентное обновление скрытых слоёв методом обратного распространения ошибки, используя обновлённые выходные веса.

Подобная комбинация напоминает методы чередующейся оптимизации, где проекции Качмажа используются как быстрое решение линейной части. Аналогичные идеи встречаются, например, в работах по ускорению обучения нейросетей, где используются методы, которые базируются на основе метода Качмажа, которые применяются для улучшения сходимости[4].

Анализ сходимости регуляризованного алгоритма Качмажа проводится по стандартной схеме. Для линейного случая известны результаты о среднем и среднеквадратичном поведении ошибки. Регуляризация ослабляет требования: даже при нарушении условий ортогональности и наличии шумов, алгоритм сходится к области порядка шума.

Таким образом, можно обосновать применение регуляризованного алгоритма Качмажа применительно к задаче обучения нейронных сетей.

Анализ работы алгоритма показал эквивалентность алгоритма Качмажа правилу наименьших квадратов и его связь со стохастическим градиентным спуском. Регуляризация алгоритма путём добавления нового параметра эквивалентна решению задачи Тихонова и гарантирует сходимость даже в случаях, когда исходная система уравнений несовместна или плохо обусловлена.

Литература

1. Жданов А.И., Сидоров Ю.В., Параллельная реализация рандомизированного регуляризованного алгоритма Качмажа // Компьютерная оптика, **39**:4 (2015), 536–541.
2. Chen, Xuemei, Kaczmarz Algorithm, row action methods, and statistical learning algorithms // Frames and harmonic analysis, Contemp. Math, **706** (2018), 115–127.
3. Жданов А.И., Иванов А.А, Проекционный регуляризирующий алгоритм для решения некорректных линейных алгебраических систем большой размерности // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки, **5**:21 (2010), 206–312.
4. Gil Goldshlager, Nilin Abrahamsen, Lin Lin, A Kaczmarz-inspired approach to accelerate the optimization of neural network wavefunctions // Journal of Computational Physics, **516** (2024), 115–127.

КОНЕЧНЫЕ ФРЕЙМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

В.В. Севостьянова

berlua@mail.ru

УДК 512.646, 517.982

Традиционно, фреймом в унитарном или евклидовом пространстве называется произвольная полная система векторов. Фреймы имеют многочисленные приложения в различных областях, таких как анализ сигналов, обработка изображений, кодирование и восстановление данных, квантовая теория информации и теория сжатых измерений. Определение фрейма дается в конечномерном пространстве над произвольным полем с произвольным невырожденным скалярным произведением. Для случая такого максимально общего определения фрейма будет рассмотрен ряд операторов, ассоциированных с фреймом, обсуждены их свойства и отличия от классического случая. Кроме того, будет показано, что и в общем случае фрейм сохраняет свойства полноты, устойчивости и избыточности, что позволяет использовать конструкцию фрейма в прикладных задачах.

Ключевые слова: пространство со скалярным произведением, конечный фрейм, операторы синтеза и анализа

Определение 1. Набор векторов $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ называется *фреймом* для вещественного или комплексного $\mathbb{H}^d$, если существуют константы $0 < a \leq b < \infty$, такие, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^d$,

$$a\|\mathbf{x}\|^2 \leq \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{x}, \varphi_j \rangle|^2 \leq b\|\mathbf{x}\|^2. \quad (1)$$

Можно дать эквивалентное определение ([1]). *Конечным фреймом* в d -мерном унитарном (евклидовом) пространстве $\mathbb{H}^d$ называется произвольный полный набор векторов: $\text{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \mathbb{H}^d$. Таким образом фрейм обобщает определение базиса, и в определении фрейма не требуется линейная независимость векторов. Подробнее о конечных фреймах в $\mathbb{H}^d$ см. в [2].

Перенесем определение конечного фрейма на случай конечномерного векторного пространства над произвольным полем $\mathbb{F}$ с произвольным невырожденным скалярным произведением.

Определение 2. *Скалярным произведением* в пространстве V будем называть билинейное отображение $B : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$, удовлетворяющее свойству рефлексивности:

$$B(x, y) = 0 \Leftrightarrow B(y, x) = 0.$$

Существуют два принципиально разных вида скалярных произведений: симметрический и кососимметрический.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2025-179.

Севостьянова Виктория Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Sevostyanova Victoria (Samara University, Samara, Russia)

Определение 3. Скалярное произведение B называется *симметрическим*, если для любых $x, y \in V$ выполняется $B(x, y) = B(y, x)$. Векторное пространство, наделенное симметрическим скалярным произведением, будем называть *квадратическим*.

Определение 4. Скалярное произведение B называется *кососимметрическим*, если для любых $x, y \in V$ выполняется $B(x, y) = -B(y, x)$. Векторное пространство вместе с введенным на нем симплектическим скалярным произведением называется *симплектическим*.

Заметим, что для полей характеристики 2 любое кососимметрическое скалярное произведение является симметрическим и наоборот. Принципиальное отличие кососимметрических скалярных произведений от симметрических состоит в том, что в пространствах с кососимметрическим скалярным произведением любой вектор x *изотропен*: $B(x, x) = 0$.

Скалярные произведения, для которых любой вектор является изотропным, называются *симплектическими*. Заметим, что симплектическое скалярное произведение всегда кососимметрическое, обратное верно, если только характеристика поля не равна 2.

Далее будем рассматривать невырожденные скалярные произведения.

Определение 5. Скалярное произведение B называется *невырожденным*, если для любого ненулевого вектора $x \in V$ найдется вектор $y \in V$, такой, что $B(x, y) \neq 0$. Векторные пространства, наделенные невырожденным скалярным произведением, будем называть *невырожденными*.

Теорема 1 [3]. *Любое скалярное произведение $B : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ является симметрическим или симплектическим. Кроме того, в пространстве можно выбрать базис так, что скалярное произведение в координатах записывается*

$$B(x, y) = (x_1y_2 + x_2y_1) + \dots + (x_{2p-1}y_{2p} + x_{2p}y_{2p-1}) + x_{2p+1}y_{2p+1} + \dots + x_ny_n \quad (2)$$

для симметрического пространства и

$$B(x, y) = (x_1y_2 - x_2y_1) + \dots + (x_{2p-1}y_{2p} - x_{2p}y_{2p-1}) \quad (3)$$

для симплектического соответственно.

Индексом Витта для симметрического или симплектического пространств называется число гиперболических плоскостей в разложении Витта пространства V . Для скалярных произведений (2) и (3) индекс Витта равен p .

Пусть V — векторное пространство размерности d над произвольным полем $\mathbb{F}$ с введенным на нем невырожденным скалярным произведением $B : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$. Рассмотрим в пространстве V набор векторов $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $n \geq d$. Каждый такой набор векторов порождает ряд операторов.

Оператор синтеза

Пусть V — невырожденное симметрическое пространство с индексом Витта p и $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$. Фиксируем $t \geq p$, такой что $n - 2t \geq d - 2p$. Оператор синтеза для набора векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ определяется следующим образом

$$\Phi : \mathbb{F}^n \rightarrow V,$$

$$\Phi(f) = \sum_{i=1}^t (f_{2i-1}\varphi_{2i} + f_{2i}\varphi_{2i-1}) + \sum_{i=2t+1}^n f_i\varphi_i,$$

где f_i — i -ая координата вектора f .

В случае вещественного поля и невырожденного симметрического пространства с нулевым индексом Витта, выбрав $t = 0$, получим классический оператор синтеза

$$\Phi(f) = \sum_{i=1}^n f_i\varphi_i.$$

Если V — невырожденное симплектическое пространство, то $\dim V = 2p$ для некоторого p . Тогда оператор синтеза для набора $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, где $n = 2t$ — четное, определим так

$$\Phi : \mathbb{F}^{2t} \rightarrow V,$$

$$\Phi(f) = \sum_{i=1}^t (f_{2i}\varphi_{2i-1} - f_{2i-1}\varphi_{2i}).$$

Для $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и, если рассматривается невырожденное симметрическое пространство с нулевым индексом Витта, то оператором, сопряженным к оператору синтеза, является оператор анализа. Определим его аналог для произвольного невырожденного пространства.

Оператор анализа

Для невырожденного пространства V дадим следующее определение оператора анализа $\Phi^* : V \rightarrow \mathbb{F}^n$:

$$\Phi^*(x) = \begin{pmatrix} B(\varphi_1, x) \\ \vdots \\ B(\varphi_n, x) \end{pmatrix}.$$

Фреймовый оператор

Композицией операторов анализа и синтеза является *фреймовый оператор* $\Phi \circ \Phi^* : V \rightarrow V$,

$$\Phi \circ \Phi^*(x) = \Phi(\Phi^*(x)).$$

Прямые вычисления позволяют записать фреймовый оператор для симметрического

$$\Phi \circ \Phi^*(x) = \sum_{i=1}^t (B(\varphi_{2i-1}, x)\varphi_{2i} + B(\varphi_{2i}, x)\varphi_{2i-1}) + \sum_{i=2t+1}^n B(\varphi_i, x)\varphi_i$$

и симплектического пространств

$$\Phi \circ \Phi^*(x) = \sum_{i=1}^t (B(\varphi_{2i}, x)\varphi_{2i-1} - B(\varphi_{2i-1}, x)\varphi_{2i}).$$

Композиция операторов анализа и синтеза в другом порядке определяет оператор Грама.

Оператором Грама называется оператор $\Phi^* \circ \Phi : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$.

Вычислим оператор Грама для симметрического пространства, для этого найдем k -ую координату результата применения оператора Грама к вектору $f \in \mathbb{F}^n$:

$$(\Phi^* \circ \Phi)(f)_k = \sum_{i=1}^t (f_{2i-1}B(\varphi_k, \varphi_{2i}) + f_{2i}B(\varphi_k, \varphi_{2i-1})) + \sum_{i=2t+1}^n f_i B(\varphi_k, \varphi_i).$$

Получаем, что оператор Грама записывается в виде $n \times n$ -матрицы, элементами данной матрицы будут

$$(\Phi^* \circ \Phi)_{i,j} = \begin{cases} B(\varphi_i, \varphi_{j-1}), & \text{если } j \text{ — четное и } j \leq 2t; \\ B(\varphi_i, \varphi_{j+1}), & \text{если } j \text{ — нечетное и } j < 2t; \\ B(\varphi_i, \varphi_j), & \text{если } j \geq 2t. \end{cases}$$

Теперь найдем оператор Грама для симплектического случая,

$$(\Phi^* \circ \Phi)(f)_k = \sum_{i=1}^t (f_{2i}B(\varphi_k, \varphi_{2i-1}) + f_{2i-1}B(\varphi_k, \varphi_{2i})).$$

Отсюда матрица оператора Грама образована элементами

$$(\Phi^* \circ \Phi)_{i,j} = \begin{cases} B(\varphi_i, \varphi_{j-1}), & \text{если } j \text{ — четное;} \\ -B(\varphi_i, \varphi_{j+1}), & \text{если } j \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Определение 6. Набор векторов $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ в d -мерном векторном пространстве V с невырожденным скалярным произведением называется *фреймом*, если фреймовый оператор набора векторов невырожден.

Лемма 1. Если набор векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ является фреймом в d -мерном пространстве, то ранг операторов синтеза и анализа равен d .

Заметим, что для фреймов в унитарном и евклидовом пространствах полнота системы векторов, образующих фрейм, и невырожденность фреймового оператора эквивалентны. В случае произвольного поля обратное к лемме утверждение не верно.

Пример 1. Приведем пример для конечного поля. Рассмотрим поле, состоящее из 4 элементов: $\mathbb{F}_4 = \{\alpha + \beta t : \alpha, \beta \in \mathbb{F}_2, t^2 + t + 1 = 0\}$. Пусть V — двумерное векторное пространство над $\mathbb{F}_4$ со скалярным произведением $B(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

1. Рассмотрим набор векторов

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix}.$$

Фреймовый оператор $\Phi \circ \Phi^* = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ невырожден, значит $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ — фрейм.

2. Теперь возьмем набор векторов

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \end{pmatrix}.$$

Заметим $\text{rank } \Phi = 2$, но $\Phi \circ \Phi^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, т.е. $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ — не фрейм.

Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — фрейм в пространстве с невырожденным скалярным произведением. Обозначим через $S = \Phi \circ \Phi^*$ — фреймовый оператор.

Утверждение 1. Если $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — фрейм, то набор векторов $\{\psi_i\}_{i=1}^n$, где $\psi_i = S^{-1}(\varphi_i)$, является фреймом.

Определение 7. Фрейм $\{S^{-1}(\varphi_i)\}_{i=1}^n$, называется фреймом, двойственным или дуальным к фрейму $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$.

Пример 2. Возьмем двумерное псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{1,1}$ со скалярным произведением $B(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$.

Рассмотрим фрейм

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Двойственным к нему будет следующий фрейм:

$$\psi_1 = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \psi_2 = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \psi_3 = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — фрейм в d -мерном невырожденном пространстве, Φ, Φ^* — его операторы синтеза и анализа соответственно. Пусть $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ — двойственный фрейм к фрейму $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ с соответствующими операторами синтеза и анализа Ψ, Ψ^* , тогда

$$\Phi \circ \Psi^* = id, \Psi \circ \Phi^* = id.$$

Теорема показывает, что фреймы в произвольных невырожденных пространствах со скалярными произведениями можно, как и в классическом случае, использовать в задачах помехоустойчивого кодирования. Кодирование будем осуществлять следующим образом:

$$x \mapsto \Phi^*(x) = (B(\varphi_1, x), \dots, B(\varphi_n, x)).$$

А декодирование так:

$$c = (c_1, \dots, c_n) \mapsto \Psi(c).$$

Теорема 3. Определенное выше линейное кодирование обнаруживает до $n - d$ ошибок и исправляет до $\left\lfloor \frac{n-d}{2} \right\rfloor$ ошибок, причем оценки точные.

Доказательство теоремы 3 конструктивно, можно показать, что существует вероятностный алгоритм исправления ошибок полиномиальной сложности.

Литература

1. Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. — Boston: Birkhaeuser, 2002.
2. Waldron S.F.D. An Introduction to Finite Tight Frames. — Boston, Birkhauser, 2018.
3. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. — Санкт-Петербург; Краснодар: Лань, 2005.

ПОЛЯ ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ ПРИСОЕДИНЕННОГО ДЕЙСТВИЯ УНИПОТЕНТНЫХ ГРУПП

В.В. Севостьянова

berlua@mail.ru

УДК 512.745.2

Пусть P — произвольная параболическая группа, а $P = L \ltimes U$ — разложение Леви в полупрямое произведение полупростой подгруппы L и унипотентной U . В работе рассматривается присоединенное действие подгруппы U на нильрадикале параболической подалгебры $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P)$. Явно указываются представители орбит общего положения относительно действия унипотентной U , а также описан алгоритм, позволяющий явно выписать алгебраически независимые образующие поля инвариантов такого действия.

Ключевые слова: инварианты, унипотентная группа, присоединенное действие

Пусть K — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Будем рассматривать группу $G = \text{GL}(n, K)$. Пусть $B \subset G$ — борелевская подгруппа в G , образованная треугольными матрицами с ненулевыми элементами на главной диагонали, а $N \subset G$ — максимальная унипотентная подгруппа треугольных матриц с единицами на главной диагонали. Пусть P — произвольная параболическая подгруппа, содержащая B . Обозначим через $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{n}$ подалгебры Ли в $\mathfrak{gl}(n, K)$ групп P , B и N соответственно. Теперь разложим параболическую подалгебру $\mathfrak{p}$ в прямую сумму $\mathfrak{p} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{m}$ нильрадикала $\mathfrak{m}$ и блочнодиагональной подалгебры $\mathfrak{t}$. Заметим, что подалгебра $\mathfrak{m}$ инвариантна относительно сопряжения элементами группы P :

$$\text{для любого } g \in P \text{ имеем } x \in \mathfrak{m} \mapsto \text{Ad}_g x = gxg^{-1}. \quad (1)$$

Отсюда получаем, что нильрадикал $\mathfrak{m}$ инвариантен относительно действия сопряжением и для элементов групп B и N . Продолжим действие (1) групп B и N на $\mathfrak{m}$ до действия в алгебре $K[\mathfrak{m}]$ и поле $K(\mathfrak{m})$:

$$\text{для любых } g \in P \text{ определим } f(x) \in K[\mathfrak{m}] \mapsto f(\text{Ad}_{g^{-1}} x).$$

Возникает естественный вопрос об описании поля инвариантов $K(\mathfrak{m})^N$ и кольца $K[\mathfrak{m}]^N$ инвариантов для действия (2). Полное описание поля инвариантов $K(\mathfrak{m})^N$ для произвольной параболической подгруппы P можно найти в [1], см. также [2]. Более детально, во множестве положительных корней выбирается некоторое подмножество S , каждому корню $\xi \in S$ ставится в соответствие N -инвариант M_ξ и показывается, что M_ξ , $\xi \in S$, являются алгебраически независимыми и порождают поле инвариантов $K(\mathfrak{m})^N$. К сожалению, такого же ясного ответа для кольца инвариантов $K[\mathfrak{m}]^N$ дать не удастся. В работе [3] описывается структура алгебры инвариантов в случаях, когда размеры диагональных блоков в подалгебре $\mathfrak{t}$ равны $(2, k, 2)$,

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2025-179.

Севостьянова Виктория Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Sevostyanova Victoria (Samara University, Samara, Russia)

$k > 2$, или $(1, 2, 2, 1)$. В частности, оказывается, что для данных случаев алгебра $K[\mathfrak{m}]^N$ не является свободной. В общем случае не известно даже, является ли $K[\mathfrak{m}]^N$ конечно порожденной.

Далее, рассмотрим разложение Леви $P = L \ltimes U$, где L — подгруппа Леви, а U — унипотентный радикал. Тогда $N = U_L \ltimes U$, где U_L — максимальная унипотентная подгруппа в L .

В работе [4] Хаджиевым доказывается

Теорема 1. Пусть G — связная редуктивная группа, а H — ее максимальная унипотентная подгруппа. Тогда для любой конечно порожденной алгебраической G -алгебры $\mathcal{A}$ алгебра $\mathcal{A}^H$ конечно порождена.

Если алгебра U -инвариантов $K[\mathfrak{m}]^U$ — конечно порожденная, то по теореме Хаджиева, удастся получить, что алгебра N -инвариантов

$$K[\mathfrak{m}]^N = K\left[K[\mathfrak{m}]^U\right]^{U_L}$$

тоже является конечно порожденной.

В работе [5] дается описание поля U -инвариантов $K(\mathfrak{m})^U$. Аналогично N -случаю во множестве положительных корней выбирается подмножество T , каждый из которых определяет U -инвариант N_ξ , $\xi \in T$. Обозначим

$$\mathcal{Z} = \left\{ \sum_{\xi \in T} c_\xi E_\xi : c_\xi \in K \right\}.$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2. Существует непустое открытое в топологии Зарисского подмножество $V \subset \mathfrak{m}$, такое что U -орбита любого $x \in V$ пересекает $\mathcal{Z}$ в единственной точке.

Теорема 3. Пусть $T = \{\xi_1, \dots, \xi_s\}$, тогда $K(\mathfrak{m})^U = K(N_{\xi_1}, \dots, N_{\xi_s})$.

Литература

1. Севостьянова В.В., Поле инвариантов присоединенного действия унитарной группы на нильрадикале параболической подалгебры // Записки научных семинаров ПОМИ, **375** (2010), 167–194.
2. Rapov A.N., Fields of invariants for unipotent radicals of parabolic subgroups // Linear and Multilinear Algebra, **71**:1 (2022), 1–14.
3. Севостьянова В.В., Алгебра инвариантов присоединенного действия унитарной группы в нильрадикале параболической подалгебры // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия, **76**:2 (2010), 72–83.
4. Хаджиев Дж., Некоторые вопросы теории векторных инвариантов // Математический сборник, **72(114)**:3, 420–435.
5. Севостьянова В.В., Об инвариантах присоединенного действия унипотентной группы // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, **31**:3 (2025), 40–52.

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОЛЕЙ
ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В ОКРЕСТНОСТИ
ВЕРШИНЫ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ В
РАСТЯГИВАЕМОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ,
ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ АЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА АМГ6**

В.П. Семенов

Voldemarsema@rambler.ru

УДК 539.3, 001.891.53, 001.891.576

Приведены результаты экспериментального исследования полей перемещений и деформаций вблизи вершины разреза методом корреляции цифровых изображений вершин центральной трещины в металлической пластине, изготовленной из алюминиевого сплава АМг6, при ее одноосном растяжении. С целью валидации численного решения экспериментальные картины сопоставлены с результатами конечно-элементного моделирования, выполненного в пакете ANSYS. Сравнение показало хорошее качественное и количественное соответствие численных и экспериментальных результатов.

Ключевые слова: метод корреляции цифровых изображений, метод конечных элементов, программный комплекс, напряженно-деформированное состояние, вершина трещины, металлическая пластина

Метод корреляции цифровых изображений (МКЦИ) или Digital image correlation (DIC) разработан для тщательного и аккуратного изучения и анализа процессов деформирования материалов как в двумерном, так и в трехмерном формате [1–2]. Метод позволяет определить коэффициенты высших приближений асимптотических разложений поля напряжений М. Уильямса, а также интенсивность напряжений в исследуемой зоне поверхности объекта испытаний. Исследователи подчеркивают потребность совершенствования методов и подходов, способных генерировать аналитические зависимости коэффициентов от геометрии объекта испытаний и приложенных к нему нагрузок. Таким образом, появляется возможность расширять таблицы, содержащие оценочные значения коэффициентов интенсивности напряжений для образцов различной природы и геометрии, а также расширять существующую базу выражений для коэффициентов высших приближений асимптотических разложений М. Уильямса [3–6]. В области экспериментальной механики метод DIC распространяется на оценку деформации твердых тел. Метод опирается на вычисление перемещений посредством процедур оптимизации и минимизации коэффициента корреляции, который служит мерой оценки подобия между пред- и последеформационными изображениями поверхности объекта. С целью проведения лабораторного исследования напряженно-деформированного состояния в условиях нормального отрыва был изготовлен экспериментальный образец с искусственной «трещиной» из алюминиевого сплава АМг6 (рис. 1). В ходе проведения эксперимента при нагружении испытуемого образца и обработке программным

Семенов Владимир Петрович, аспирант, Самарский университет (Самара, Россия); Vladimir Semenov (Samara University, Samara, Russia)

комплексом Correlation были получены следующие результаты для деформаций. Результаты построения полей деформаций представлены на рис. 2.

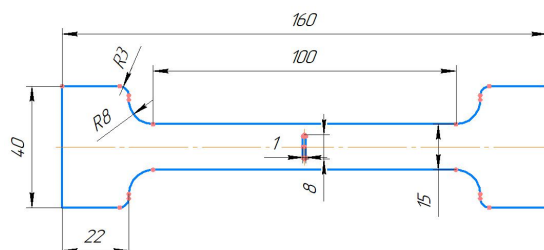


Рис. 1: Геометрия образцов (ГОСТ 1497-84)

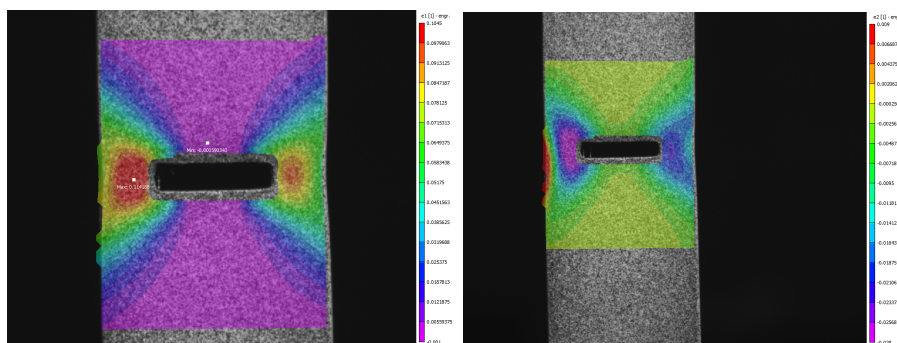


Рис. 2: Поле деформаций ε_{xx} (слева) и ε_{yy} (справа) при нагрузке 2800 Н

В работе сравниваются результаты расчетов методом конечных элементов и данные, полученные в результате исследований с использованием DIC. В модели была использована конфигурация трещины с заданными граничными условиями и соответствующими усилиями. DIC позволяет исследовать лишь деформационные поля на поверхности. В силу поставленной задачи в программном комплексе SIMULIA Abaqus сконструирована 2D-модель пластины с центральной трещиной в виде отрезка на модели и с физическими характеристиками материала для алюминиевого сплава АМг6 (рис. 3). Результаты построения полей деформаций представлены на рис. 4.

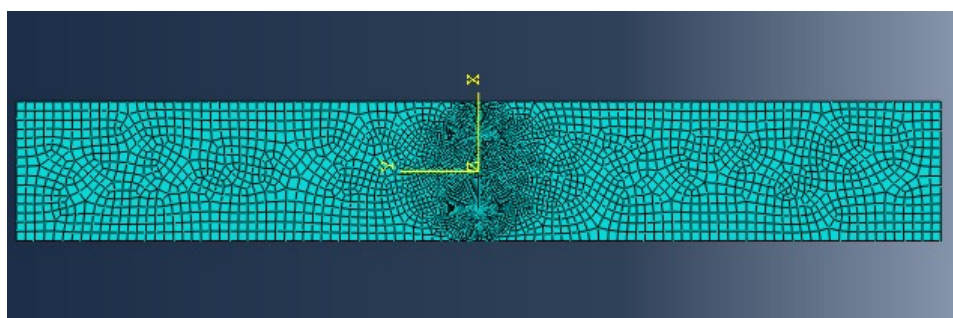


Рис. 3: Конечно-элементная сетка модели в SIMULIA Abaqus

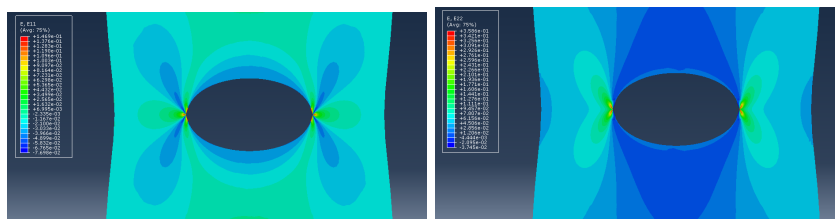


Рис. 4: Поле деформаций ε_{xx} (слева) и ε_{yy} (справа) при нагрузке 2800 Н

В силу поставленной задачи в программном комплексе ANSYS сконструирована 3D-пластина с геометрией (рис. 1) и толщиной 0,8 мм с физическими характеристиками материала для алюминиевого сплава АМг6 (рис. 5). Результаты построения полей деформаций представлены на рис. 6.

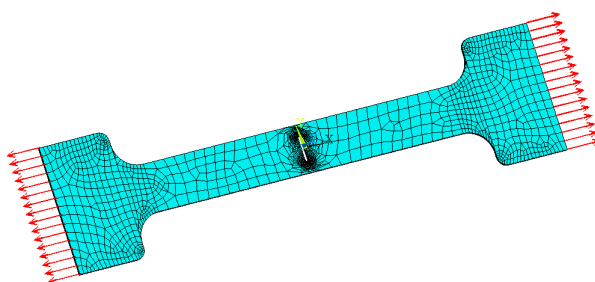


Рис. 5: Конечно-элементная сетка модели в ANSYS

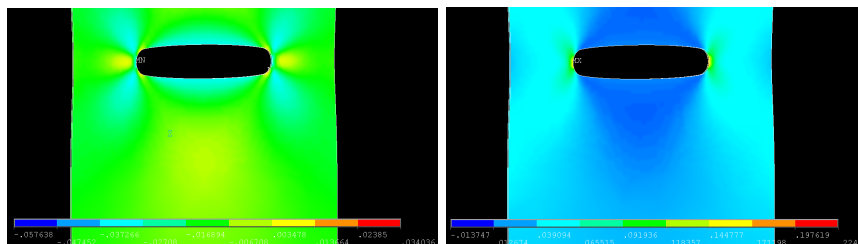


Рис. 6: Поле деформаций ε_{xx} (слева) и ε_{yy} (справа) при нагрузке 2800 Н

В настоящей работе из результатов видно, что концентрация напряжений, вызванная наличием трещины в пластине, расположена в непосредственной близости вершин трещины. На расстоянии порядка длины трещины от края самой трещины концентрация напряжений в пластине исчезает и они становятся равными напряжениям «на бесконечности». Эти результаты качественно согласуются с аналитической теорией и близки к вычислительным результатам, полученным методом конечных элементов в программных продуктах SIMULIA Abaqus и ANSYS. Усовершенствование существующих экспериментальных процессов с каждым годом становится все более привлекательным для многих научных кадров и авторов.

Литература

1. Плешанов В.С. и др., Измерение деформации материалов методом корреляции цифровых изображений // Известия Томского политехнического университета [Известия ТПУ]: Математика и механика. Физика. Приложение: Неразрушающий контроль и диагностика, **312:2** (2008), 343–349.

2. Любутин П.С., Панин С.В., Титков В.В. и др., Развитие метода корреляции цифровых изображений для изучения процессов деформации и разрушения конструкционных материалов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, 1 (2019), 88–109. — DOI 10.15593/perm.mech/2019.1.08.
3. Любутин П.С., Панин С.В., Титков В.В., Еремин А.В., Сундер Р., Развитие метода корреляции цифровых изображений для изучения процессов деформации и разрушения конструкционных материалов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, 1 (2019), 87–107.
4. Степанова Л.В., Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть II // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика, 1 (2021), 72–85. — DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.1.08>.
5. Степанова, Л.В., Мушанкова К.А., Эффекты слагаемых высшего порядка малости в обобщенных рядах для представления полей, ассоциированных с вершиной трещины в анизотропных средах. Часть 1. Сравнение точного и асимптотического решений определения напряжений у вершины трещины // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, 1 (2025), 59–81. — DOI 10.15593/perm.mech/2025.1.05.
6. Степанова, Л.В., Мушанкова К.А., Эффекты слагаемых высшего порядка малости в обобщенных рядах для представления полей, ассоциированных с вершиной трещины в анизотропных средах. Часть 2. Оценки точности асимптотических решений // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, 2 (2025), 39–56. — DOI 10.15593/perm.mech/2025.2.04.

RUC-СВОЙСТВО ХАОСОВ ПО СИММЕТРИЧНЫМ СЛУЧАЙНЫМ ВЕЛИЧИНАМ В L_∞

П.А.Слиняков
slinakovp@gmail.com

УДК 517.98:519.21, 519.651

Пусть $X = \{X_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых симметричных ограниченных случайных величин. В работе рассматриваются системы вида $\{X_i X_j\}_{i < j}$, $\{X_i X_j X_k\}_{i < j < k}, \dots$, называемые хаосами. Такие системы, упорядоченные определенным способом, образуют базисные последовательности во всех симметричных пространствах. В работе показано, что эти системы, рассматриваемые в пространстве L_∞ , не являются безусловными, но обладают близким свойством случайной безусловной сходимости.

Ключевые слова: равномерная норма, случайная безусловная сходимость, геометрия банаховых пространств, хаос Радемахера, полиномиальный хаос, симметричные случайные величины

Пусть $X = \{X_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых симметричных ограниченных (в смысле sup-нормы) случайных величин (СВ), заданная на вероятностном пространстве $([0, 1], \mu)$, где μ — стандартная мера Лебега.

Пусть $d, n \in \mathbb{N}$ такие, что $1 \leq d \leq n$. Обозначим через Δ_n^d множество мультииндексов $J = (j_1, \dots, j_d)$ таких, что $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_d \leq n$.

Рассмотрим систему, составленную из элементов последовательности СВ $\{X_k\}$, вида $\{X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_d}\}_{(j_1, j_2, \dots, j_d) \in \Delta_n^d}$, которую назовем *однородным случайным хаосом порядка d* ; объединение таких систем порядков от 1 до d назовем *смешанным случайным хаосом порядка d* .

Будем говорить (следуя [1]), что последовательность $\{x_k\}$ обладает свойством RUC (Random Unconditional Convergence) в банаховом пространстве X , если существуют такие универсальные константы, что для любого n и для любых скаляров $\{a_k\}$, $1 \leq k \leq n$ выполняется

$$\mathbb{E}_\theta \left\| \sum_{k=1}^n \theta_k a_k x_k \right\|_X \asymp \min_{\theta_k = \pm 1} \left\| \sum_{k=1}^n \theta_k a_k x_k \right\|_X,$$

где θ_k — независимые случайные величины, такие что

$$\mathbb{P}\{\theta_k = 1\} = \mathbb{P}\{\theta_k = -1\} = 1/2.$$

Следующая теорема показывает, что определенный выше хаос не обладает свойством безусловной сходимости в L_∞ .

Теорема 1. *Как однородный, так и смешанный хаос порядка d , построенные по последовательности $X = \{X_k\}$ независимых симметричных ограниченных случайных величин, не обладают свойством безусловности в L_∞ .*

Теорема 2. *Как однородный, так и смешанный хаос порядка d , построенные по последовательности $X = \{X_k\}$ независимых симметричных ограниченных случайных величин, обладают свойством RUC.*

Исследования поддержаны Национальной академией наук Беларуси в рамках государственной программой научных исследований (задание 1.3.05).

Слиняков Павел Александрович, Институт математики НАН Беларуси (Минск, Беларусь); Slinyakov Pavel (Institute of Mathematics of NAS of Belarus, Minsk, Belarus)

Для перехода от однородных хаосов к смешанным использовано следующее утверждение, вытекающее из [2, Lemma 2]. Полиномом по системе будем называть конечную линейную комбинацию элементов этой системы.

Лемма 1. Существует константа K_d , зависящая только от d , такая, что для любой последовательности $\eta = \{\eta_k\}$ независимых ограниченных СВ, любого полинома $Q(\eta)$ по смешанному случайному хаосу $\{\eta_{j_1} \eta_{j_2} \dots \eta_{j_m}\}_{(j_1, j_2, \dots, j_m) \in \Delta^m, m \leq d}$ порядка d и для любой однородной компоненты $Q_m(\eta)$ этого полинома выполняется:

$$\|Q_m(\eta)\|_{L_\infty} \leq K_d \|Q(\eta)\|_{L_\infty}.$$

Следует отметить также свойства дополняемости подпространств в L_∞ , порожденных хаосами, вытекающие из представленных результатов.

Следствие 1. Подпространства в L_∞ , порожденные однородными хаосами меньшего порядка, являются дополняемыми подпространствами в подпространствах L_∞ , порожденных смешанными хаосами большего порядка.

Следствие 2. Однородный хаос содержит подсистемы, которые порождают недополняемые подпространства в подпространстве L_∞ , порожденном этим однородным хаосом.

Доказательства некоторых из представленных результатов изложены в работе [3].

Литература

1. Billard P., Kwapień, S. Pelchynski A., Samuel Ch. Biorthogonal systems of random unconditional convergence in Banach spaces // Longhorn Notes. Texas Funct. Anal. Seminar. — Texas, Austin: Univ. Texas, 1985–1986. — 13–35.
2. Kwapień S., Decoupling inequalities for polynomial chaos. // Ann. Probab., **15**:3 (1987), 1062–1071.
3. Slinyakov P.A., Lykov K.V., RUC Property for Chaos of Random Variables in the Uniform Norm // Труды Института математики НАН Беларуси, **33**:2 (2025) (принято в печать).

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ АНАЛОГ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.Н. Смирнова
Na5anya@yandex.ru

УДК 517.956

В работе рассматривается нелокальная задача для гиперболического уравнения в характеристической области. Классические методы исследования неприменимы в силу нелокального характера данных. В работе предложен новый подход, позволяющий установить существование не более одного решения задачи, а для частного случая — найти решение в явном виде.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, задача Гурса, нелокальные условия.

Рассмотрим в области $\Omega = (0, \alpha) \times (0, \beta)$ уравнение

$$u_{xy} + (Au)_x + (Bu)_y + Cu = f(x, y) \quad (1)$$

и поставим следующую задачу: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\int_0^\beta u(x, y) dy = \varphi(x), \quad \int_0^\alpha u(x, y) dx = \psi(y). \quad (2)$$

Будем считать, что коэффициенты уравнения, его правая часть, а также функции $\varphi(x), \psi(y)$ достаточно гладкие.

Первым этапом исследования задачи (1)–(2) является получение условий, гарантирующих существование не более одного решения.

Теорема 1. Если $A_y, B_x, C_{xy} \in C(\bar{\Omega})$, $C_{xy} \geq 0$, и для любого вектора (p_1, p_2) выполняется неравенство $A_y p_1^2 - 2C p_1 p_2 + B_x p_2^2 \geq 0$, то существует не более одного решения задачи (1)–(2).

Теорема 1 справедлива для любых α и β , но при сильных ограничениях на коэффициенты уравнения. Последнее условие удалось ослабить, о чём говорит следующая теорема.

Теорема 2. Если $A, B, C \in C(\bar{\Omega})$, $A_x, B_y \in C(\Omega)$ и выполняется неравенство $\max_{\bar{\Omega}} |C(x, y)| < \frac{2}{\alpha^2 + \beta^2}$, то существует не более одного решения задачи (1)–(2).

В качестве частного случая рассматривается уравнение

$$u_{xy}(x, y) + A(y)u_x + B(x)u_y + A(y)B(x)u = F(x, y),$$

интегральные условия при этом остаются прежними.

Структура коэффициентов и ряд преобразований позволяют получить формулу решения.

Смирнова Анастасия Николаевна, Самарский университет (Самара, Россия);
Anastasia Smirnova (Samara University, Samara, Russia)

Рассмотрен ещё один частный случай

$$u_{xy} + C(x, y)u = f(x, y),$$
$$\int_0^\beta u(x, y)dy = \varphi(x), \quad \int_0^\alpha u(x, y)dx = \psi(y).$$

Такая задача имеет не более одного решения, если

$$\frac{C_0}{2}(1 + \alpha^2\beta^2) < 1, \quad C_0 = \max_{\bar{\Omega}} |C(x, y)|.$$

Тип условий (2) выводит задачу за рамки классической теории, требуя разработки специальных методов. В работе предложен и реализован метод доказательства существования и единственности решения поставленной задачи. При рассмотрении частного случая — получен явный вид решения.

Литература

1. Самарский А.А., О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, **16**:11 (1980), 1925–1935.
2. Богатов А.В., Гилев А.В., Пулькина Л.С., Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками // Вестник Российских университетов. Математика, **27**:139 (2022), 214–230.
3. Гилев А.В., Кечина О.М., Пулькина Л.С., Характеристическая задача для уравнения четвертого порядка с доминирующей производной // Вестник Самарского университета. Естественная серия, **27**:3 (2021), 14–21.
4. Пулькина Л.С., О разрешимости в L_2 задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения Дифф. уравнения, **36**:2 (2000), 279–280.

ХАРАКТЕРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НАГРУЖЕНИЯ УЛЬТРАТОНКОЙ АЛЮМИНИЕВОЙ ПЛАСТИНЫ НА КРЕМНИЕВОМ ОСНОВАНИИ

Л.В. Степанова, К.А. Буланова
stepanova.lv@ssau.ru, bulanova.ka@ssau.ru

УДК 539.3, 539.6

Работа посвящена молекулярно-динамическому моделированию нагружения ультратонкой алюминиевой пластины на кремниевом основании. Рассмотрение задач о деформировании тонкой пластины на кремниевом основании обусловлено необходимостью иметь полное представление о ее механическом поведении на наномасштабном уровне, что чрезвычайно важно для развития нано- и микроэлектронных механических систем. В работе построен целый ряд молекулярно-динамических моделей алюминиевой пластины на кремниевом основании с использованием различных потенциалов межатомного взаимодействия, доступных для моделирования в пакете Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator (LAMMPS), таких как потенциал Терсоффа и потенциал Стиллера-Вебера для описания кремния, вкуче с потенциалом внедренного атома для моделирования алюминия, а также общего MEAM потенциала для моделирования свойств как алюминия, так и кремния.

Ключевые слова: метод молекулярной динамики, алюминий, кремний, микроэлектромеханическая система, потенциал внедренного атома, потенциал Tersoff, потенциал Стиллера-Вебера

В настоящее время МЭМС-технологии стали неотъемлемым компонентом конструкций, начиная от медицинских и военных изделий и заканчивая электронными изделиями. Отсутствие надлежащих знаний о надежности МЭМС-систем является одной из ключевых трудностей на пути коммерциализации МЭМС-технологий. Для решения сформулированной проблемы, для понимания процессов, протекающих на наноскопическом уровне был избран метод молекулярной динамики и его воплощение в пакете с открытым кодом Large-scale Atomic/Massively Molecular Parallel Simulator (LAMMPS). Для реализации гибридного (многомасштабного) подхода на наноскопическом уровне был избран метод молекулярной динамики. Метод молекулярной динамики (МД) — это уже не просто инструмент теоретиков, а полноценная, мощная и междисциплинарная вычислительная технология [1-3]. Метод МД применительно к МЭМС открывает уникальные возможности для исследования и проектирования этих устройств на фундаментальном, атомарном уровне. В то время как классическое моделирование МЭМС основано на континуальных приближениях (механика сплошных сред, теория упругости), МД позволяет заглянуть "внутрь" материала и увидеть процессы, которые невозможно смоделировать другими методами. Когда размеры элементов МЭМС (балок, мембран, резонаторов) достигают нанометров, их

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-11-00333).

Степанова Лариса Валентиновна, д.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Larisa Stepanoova (Samara University, Samara, Russia)

Буланова Карина Артемовна, аспирант Самарский университет (Самара, Россия); Karina Bulanova (Samara University, Samara, Russia)

свойства перестают описываться макроскопическими константами. Прочность, теплопроводность, трение начинают сильно зависеть от атомистической структуры (дефекты, границы зерен, поверхность). Размеры модели: радиус пластины = 139.386 Å, толщина пластины=9Å, радиус подложки = 139.386 Å, толщина подложки=40 Å, радиус выреза в подложке под пластиной =70 Å.

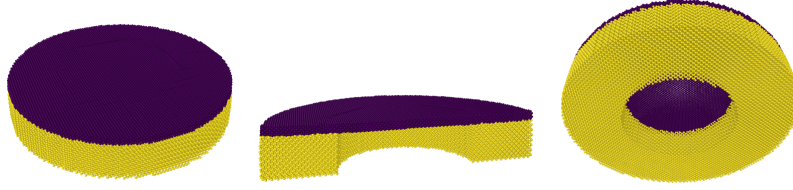


Рис. 1: Геометрия ультратонкой алюминиевой пластины на кремниевом основании: пластина показана темно фиолетовым цветом, основание – желтым; вид сверху (слева), сечение пластины (в центре), вид снизу (справа)

Результаты вычислений напряжений представлены на рис. 2–4.

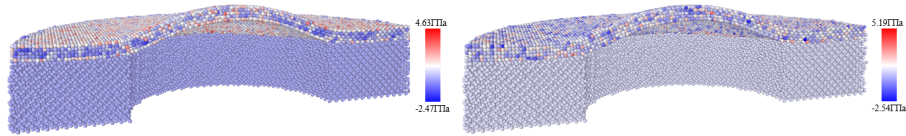


Рис. 2: Распределение компонент напряжений σ_{xx} (слева) и σ_{yy} (справа) в алюминиевой пластине при 0.5 пс

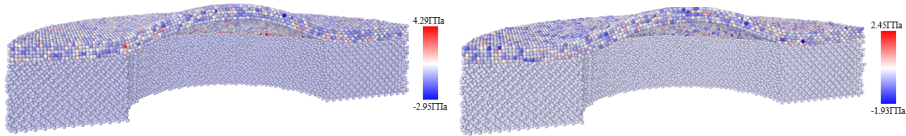


Рис. 3: Распределение компонент напряжений σ_{zz} (слева) и σ_{xy} (справа) в алюминиевой пластине при 0.5 пс

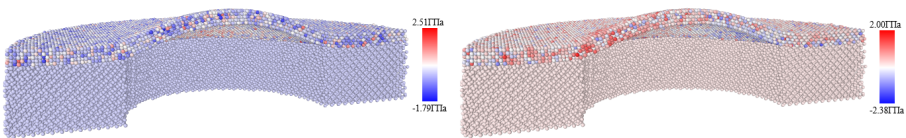


Рис. 4: Распределение компонент напряжений σ_{xz} (слева) и σ_{yz} (справа) в алюминиевой пластине при 0.5 пс

В настоящей работе

- 1) Построена совокупность атомистических моделей ультратонкой мембраны из монокристаллического алюминия на кремниевом основании с идеальной кристаллической структурой в рамках методологии молекулярной динамики.

- 2) Проведены молекулярно-динамические расчеты в пакете LAMMPS, реализующем метод молекулярной динамики, ультратонкой алюминиевой мембраны на кремниевом основании, находящейся под действием нормального давления для целой серии потенциалов взаимодействия для кремния.

Определены поля атомистических напряжений Коши в алюминиевой пластине. Найдены значения критической нагрузки, которую может выдержать данный образец.

3) Проведены молекулярно-динамические расчеты в пакете LAMMPS, реализующем метод молекулярной динамики, ультратонкой алюминиевой мембраны на кремниевом основании, находящейся под действием циклического нормального давления для целой серии потенциалов взаимодействия для кремния. Определены поля атомистических напряжений Коши в алюминиевой пластине. Найдены значения критической нагрузки, которую может выдержать данный образец, в зависимости от числа циклов нагружения.

4) Для циклического нагружения ультратонкой мембраны проведены: проверка сохранения симметрии цикла, анализ гистерезисных петель, мониторинг накопления повреждений, контроль температурного режима.

5) Выполнены молекулярно-динамические расчеты в пакете LAMMPS, реализующем метод молекулярной динамики, ультратонкой алюминиевой мембраны на кремниевом основании, находящейся под действием нормального давления для целой серии потенциалов взаимодействия для кремния для двух температур 300K и 600K. Определены поля атомистических напряжений Коши в алюминиевой пластине. Найдены значения критической нагрузки, которую может выдержать данный образец.

6) Выполнены молекулярно-динамические расчеты в пакете LAMMPS, реализующем метод молекулярной динамики, ультратонкой алюминиевой мембраны на кремниевом основании, находящейся под действием циклического нормального давления для целой серии потенциалов взаимодействия для кремния для двух температур 300K и 600K. Определены поля атомистических напряжений Коши в алюминиевой пластине. Найдены значения критической нагрузки, которую может выдержать данный образец, в зависимости от числа циклов нагружения.

Литература

1. *Stepanova L.V., Mushankova K.A.*, Atomistic and continuum Ascertainment of The crack tip stress fields in anisotropic elastic cubic media // Theoretical and Applied Fracture Mechanics, **133** (2024), art. no. 104613. — DOI 10.1016/j.tafmec.2024.104613.
2. *Мушанкова К.А., Степанова Л.В.*, Определение коэффициентов асимптотического ряда для полей напряжений на основе молекулярно-динамических вычислений // Прикладная механика и техническая физика. - 2025. - № 2(390). - С. 196–212. - DOI 10.15372/PMTF202415537.
3. *Степанова Л.В., Мушанкова К.А.*, Атомистическое и континуальное определение полей напряжений у вершины трещины в анизотропных средах с кубической сингонией // Проблемы прочности и пластичности, **86:1** (2024), 15–25. — DOI 10.32326/1814-9146-2024-86-1-15-25.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООВОГО СОСТОЯНИЯ ШИРМОВОГО ПАРОПЕРЕГРЕВАТЕЛЯ КОТЛА ТГМ-84

Л.П. Строкин
strokin.samara@mail.ru

УДК 536.24

В работе рассматривается постановка задачи и методика математического моделирования теплового состояния ширмового пароперегревателя котла ТГМ-84. Разрабатываемая модель ориентирована на анализ теплового состояния поверхностей нагрева и прогнозирование зон возможного перегрева. Рассматриваемый подход базируется на уравнении теплового баланса и использовании уточнённых корреляций Нуссельта для описания конвективного теплообмена. Полученные зависимости предназначены для дальнейшей реализации в численно-аналитической форме и последующей калибровки по экспериментальным данным эксплуатации.

Ключевые слова: пароперегреватель, тепловое состояние, тепловой баланс, математическое моделирование, корреляции Нуссельта, теплопередача

Задачей исследования является построение математической модели теплового состояния ширмового пароперегревателя котла ТГМ-84 в стационарном режиме при учёте конвективного теплообмена между продуктами сгорания и перегреваемым паром. Модель основывается на уравнениях теплового баланса для потоков газа и пара, связанных через теплопередачу через стенку труб. В дифференциальной форме уравнения теплового баланса (1) имеют вид:

$$\dot{m}_g c_{p,g} \frac{dT_g}{dx} = -q'(x), \quad \dot{m}_s c_{p,s} \frac{dT_s}{dx} = q'(x), \quad (1)$$

где T_g и T_s — температуры газа и пара соответственно, $\dot{m}$ — массовый расход, c_p — удельная теплоёмкость, $q'(x)$ — локальный тепловой поток через стенку трубы.

Тепловой поток определяется уравнением теплопередачи (2):

$$q'(x) = U(x)P[T_g(x) - T_s(x)], \quad (2)$$

где $U(x)$ — локальный коэффициент теплопередачи, включающий сопротивление конвекции и теплопроводности стенки:

$$\frac{1}{U(x)} = \frac{1}{\alpha_g(x)} + \frac{\delta}{\lambda_m} + \frac{1}{\alpha_s(x)}.$$

Здесь α_g и α_s — коэффициенты теплоотдачи со стороны газа и пара, λ_m — теплопроводность материала трубы, δ — её толщина.

Коэффициенты теплоотдачи определяются по корреляциям Нуссельта вида (3):

$$Nu = C Re^m Pr^n, \quad (3)$$

Строкин Леонид Павлович, аспирант, Самарский государственный технический университет (Самара, Россия); Leonid Strokin (Samara State Technical University, Samara, Russia)

где коэффициенты C , m и n уточняются в процессе калибровки модели по экспериментальным данным. Для этого используются измеренные значения температур газа и пара на входе и выходе пароперегревателя, а также температуры металла в контрольных точках.

Разработанная модель позволяет вычислить распределение температур вдоль длины пароперегревателя и определить зоны повышенной тепловой нагрузки. После калибровки коэффициентов по реальным данным установка может использоваться для прогнозирования теплового состояния оборудования и оптимизации режимов эксплуатации.

В современной практике моделирование пароперегревателей реализуется разными способами. К численно-аналитическим относятся работы [1,2], они основаны на решении уравнений теплового баланса и используются для инженерных расчётов и оценок состояния оборудования. К вычислительным, а именно CFD-моделированию, относятся [3,4]. Данный способ обеспечивает детализированное описание полей скорости и температуры, но требует значительных вычислительных ресурсов.

Объект исследования — ширмовый пароперегреватель котла ТГМ-84 с паропроизводительностью 420 т/ч, обеспечивающий пар с параметрами 140 атм и 560 °С. Конструктивно он состоит из 20 ширм с 41 трубой (диаметр 32 мм, толщина стенки 4 мм, сталь 12Х1МФ) каждая, с общей поверхностью нагрева около 500 м². Приведенные данные, а также типовые и табличные значения служат основой для задания граничных условий для моделирования.

Литература

1. Michel A., Kugi A., Accurate low-order dynamic model of a compact plate heat exchanger // International Journal of Heat and Mass Transfer, **61** (2013), 323–331.
2. Weglarz K., Taler D., Taler J., Marcinkowski M., Numerical Modelling of Steam Superheaters in Supercritical Boilers // Energies, **16**:6 (2023), art.no. 2615.
3. Granda M., Trojan M., Taler D., CFD analysis of steam superheater operation in steady and transient state // Energy, **199** (2020), art. no. 117423.
4. Trojan M., Computer modeling of a convective steam superheater // Archives of Thermodynamics, **36**:1 (2015), 125–137.

ЛЕКЦИЯ — ОСНОВНАЯ ФОРМА ОРГАНИЗАЦИИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА В ВУЗЕ

А.В. Тарасенко

tarasenko.a.v@mail.ru

УДК 378.147

Лекция является ведущей формой организации учебного процесса в вузе. В работе описываются цели, которые выполняют лекционные занятия. Сформулированы дидактические требования, предъявляемые к лекциям, перечислены основные типы лекционных занятий в современном мире, а также приведены рекомендации преподавателям для успешного проведения данных занятий.

Ключевые слова: учебный процесс, лекция, дидактические требования, типы лекций, рекомендации.

Лекцией является последовательное, систематизированное, чаще всего устное, изложение учебного материала преподавателя перед студентами. Лекция реализует несколько целей, которые тесно взаимосвязаны друг с другом, таких как:

- 1). Передача обучающимся фундаментальных знаний по изучаемой дисциплине (данная цель является одной из основных).
- 2). Формирование целостного представления об определенной научной области.
- 3). Стимулирование у студентов научного интереса и познавательной активности.
- 4). Развитие личностных качеств обучающихся, таких как: дисциплинированность, ответственное отношение, самостоятельность, саморазвитие и т.д.

В педагогике требования, которые предъявляются к организации учебного процесса, называются дидактическими [1]. Данные требования определяют содержание, методы и формы обучения. Каждый преподаватель при подготовке и реализации лекционных занятий должен выполнять следующие дидактические требования:

- 1). Каждая лекция должна быть научно обоснованной и иметь определенный уровень информативности для слушателей.
- 2). Все факты должны быть строго аргументированными. При необходимости (иногда по усмотрению преподавателя) приводятся доказательства.
- 3). Внутри каждой лекции и между лекциями должна просматриваться четкая структура и последовательность. Также важно учитывать способ расположения учебного материала в программе [2], так как существуют линейный, концентрический и спиральный принципы расположения материала [3], [4].
- 4). При необходимости в лекции приводятся примеры (краткие, четкие, убедительные), которые поясняют теорию.
- 5). Изложение теоретического материала необходимо проводить доступным языком.

В современном мире основными типами лекций являются следующие: классическая, проблемная, лекция-дискуссия, лекция-презентация, лекция

Тарасенко Анна Валерьевна, к.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Tarasenko Anna (Samara University, Samara, Russia)

с запланированными ошибками. Каждый тип лекций имеет свои особенности, и для разных дисциплин некоторые виды могут являться трудно реализуемыми. Каждый преподаватель в праве выбирать тот или иной тип лекций самостоятельно. Тип лекции во многом зависит от содержания теоретического материала, но при этом хочется отметить, что лучше всего воспринимается визуальная информация, а по результатам исследования, проведённого в 2015 году Российской ассоциацией по связям с общественностью [5], 90% подростков и 89% взрослых считали текст удобным или очень удобным носителем информации. Картинки с подписью также получили высокие оценки: 86% у подростков и 79% у взрослых. В силу выше указанного, можно заключить, что лекция-презентация является одним из самых лучших типов лекций для современного поколения.

Любую лекцию можно оценить по таким критериям как содержание, методика, руководство работой студентов и результативность лекции. Для успешной реализации можно сформулировать следующие рекомендации преподавателям, которые читают лекции:

- 1). Лекция не должна сводиться к простому пересказу учебника.
- 2). Хорошая лекция — это личное научно-педагогическое творчество преподавателя. Каждая лекция уникальна! Одна и та же лекция у разных преподавателей студентами будет восприниматься по-разному.
- 3). При проведении лекционных занятий для облегчения обучающимся восприятия теоретического материала желательно использовать примеры.
- 4). Поощрение студентов, проявляющих самостоятельность, интерес к предмету.
- 5). Так как преподаватель рассказывает теоретический материал на аудиторию, то должна присутствовать некоторая степень эмоциональности. Хороший преподаватель должен уметь держать аудиторию и работать с толпой. Обладать ораторскими качествами и уметь устанавливать контакт. Нельзя "пробубнить лекцию под нос".
- 6). Визуализировать материал лекций, в том числе даже теоретический. Визуализация помогает поддерживать внимание обучающихся в течение всего занятия.

Лекция является ведущей формой организации учебного процесса в вузе. Она имеет неоспоримое преимущество - при реализации общения преподавателя с обучающимися происходит активизация мыслительной деятельности последних, и данный способ является одним из самых экономных способов получения основ знаний. Лекции никогда не устареют, и данная форма учебного процесса всегда будет актуальной.

Литература

1. Камалеева А.Р., Гризодуб Н.В. Педагогика высшей школы: педагогическое образование: учебное пособие. — Институт педагогики, психологии и социальных проблем; Донецкий национальный университет. — Казань, 2023. — 230 с.
2. Тарасенко А.В. О важности выбора способа изложения учебного материала на занятиях по математике // В книге: Нефтегазовый комплекс: проблемы и инновации. Тезисы III научно-практической конференции с международным участием. Ответственный редактор В.К. Тянь, 2018. — 205.
3. Тарасенко А.В., Егорова И.П. Линейный принцип расположения учебного материала на занятиях по математике // В сборнике: Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Естественные науки и техносферная безопасность. Сборник статей. Под редакцией М.В. Шувалова. — Самара, 2018. — 39–40.

4. *Тарасенко А.В.* Спиральный способ изложения материала на занятиях по математике // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Естественные науки и техносферная безопасность: сборник статей по материалам 72-й Всероссийской научно-технической конференции. — СГАСУ. Самара, 2015.— 56–58.
5. *Грязнова Ю.Б.* Как новое поколение воспринимает информацию. // Российская школа связей с общественностью: ежегодный альманах. Вып. 9. — Москва, 2017. — 189–199.

**О ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОПЕРАТОРОМ
РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ**

А.В. Тарасенко

tarasenko.a.v@mail.ru

УДК 517.95

В односвязной прямоугольной области для нагруженного дифференциального уравнения теплопроводности исследована задача. Одно из краевых условий содержит оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля порядка α . Показано, что полученное уравнение является интегральным уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью в ядре. Основной результат сформулирован в виде теоремы.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля.

В области $D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$, где l, T – некоторые заданные положительные действительные числа рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u|_{x=0}. \quad (1)$$

Задача. Найти в области D регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (1) из класса $u(x, t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup (0, T))$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0, \quad 0 \leq x \leq l; \quad (2)$$

$$u(l, t) = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} - I_{0+}^\alpha u|_{x=0} = -\varphi_3(t), \quad 0 < t < T. \quad (4)$$

$(I_{0+}^\alpha f)(x)$ – оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля порядка α , имеющий вид

$$(I_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (\alpha > 0, x > 0).$$

Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, такие что $\varphi_1(x) \in C^1[0, l]$, $\varphi_2(t) \in C^1[0, T]$, $\varphi_3(t) \in C^1[0, T]$, $\varphi_1(0) = -\varphi_3(0)$, $\varphi_2(0) = \varphi_1(l)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, тогда задача (1)–(4) разрешима в указанном классе функций и притом единственным образом.

Единственность и существование решения краевой задачи.

Используя свойства функции Грина смешанной краевой задачи и краевое условие (4), можно свести поставленную задачу к интегральному уравнению вольтерровского типа относительно следа искомой функции $u(0, t)$.

Тарасенко Анна Валерьевна, к.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Tarasenko Anna (Samara University, Samara, Russia)

Вначале запишем интегральное представление решения задачи для уравнения (1) в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^t G|_{\xi=0} u_\xi(0, \eta) d\eta + \int_0^l G|_{\eta=0} u(\xi, 0) d\xi - \\ & - \int_0^t G_\xi|_{\xi=l} u(l, \eta) d\eta + \int_0^t u(0, \eta) d\eta \int_0^l G d\xi, \end{aligned} \quad (5)$$

где $G(x, t, \xi, \eta)$ – функция Грина смешанной краевой задачи, которая имеет вид [1]

$$\begin{aligned} G(x, t, \xi, \eta) = & \frac{(t - \eta)^{-\frac{1}{2}}}{2l\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(t-\eta)}} + e^{-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(t-\eta)}} - \right. \\ & \left. - e^{-\frac{(x-\xi-2l+2n)^2}{4(t-\eta)}} - e^{-\frac{(x+\xi-2l+2n)^2}{4(t-\eta)}} \right]. \end{aligned}$$

Используя краевое условие (4), получаем, что равенство (5) примет вид

$$\begin{aligned} u(0, t) = & \int_0^t G|_{\xi=0} u_\xi(0, \eta) d\eta + \int_0^l G|_{\eta=0} u(\xi, 0) d\xi - \\ & - \int_0^t G_\xi|_{\xi=l} u(l, \eta) d\eta + \int_0^t u(0, \eta) d\eta \int_0^l G|_{x=0} d\xi. \end{aligned}$$

Далее используя краевое условие (3), учитывая, что функция Грина при $x = 0$, $\xi = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} G|_{\xi=0} = & \frac{(t - \eta)^{-\frac{1}{2}}}{l\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{n^2}{t-\eta}} - e^{-\frac{(n-l)^2}{t-\eta}} \right] = \\ = & \frac{(t - \eta)^{-\frac{1}{2}}}{l\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-\frac{l^2}{t-\eta}} \right) + \frac{(t - \eta)^{-\frac{1}{2}}}{l\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left[e^{-\frac{n^2}{t-\eta}} - e^{-\frac{(n-l)^2}{t-\eta}} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где $\sum'$ – означает суммирование по всем n , исключаяющее значение $n = 0$, из последнего выражения получаем

$$\begin{aligned} u(0, t) - f_1(t) - & \int_0^t f_2(t, \eta) (t - \eta)^{-\frac{1}{2}} I_{0+}^\alpha u(0, \eta) d\eta - \\ & - \int_0^t f_3(t, \eta) (t - \eta)^{-\frac{1}{2}} I_{0+}^\alpha u(0, \eta) d\eta - \int_0^t u(0, \eta) d\eta \int_0^l G|_{x=0} d\xi = 0, \end{aligned}$$

где

$$f_1(t) = \int_0^l G \Big|_{\substack{\eta=0 \\ x=0}} u(\xi, 0) d\xi - \int_0^t G \Big|_{\substack{\xi=0 \\ x=0}} \mu(\eta) d\eta - \int_0^t G_\xi \Big|_{\substack{\xi=l \\ x=0}} u(l, \eta) d\eta.$$

$$f_2(t, \eta) = \frac{1}{l\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{n^2}{t-\eta}} - e^{-\frac{(n-l)^2}{t-\eta}} \right], \quad f_3(t, \eta) = \frac{1}{l\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-\frac{l^2}{t-\eta}} \right).$$

Поскольку функция Грина $G(x, t, \xi, \eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по своим аргументам [2], то учитывая гладкость входящих функций, можно утверждать, что $f_1(t) \in C(\bar{I})$, где $I = (0, T)$.

По отдельности исследуя выражения

$$\int_0^t f_2(t, \eta) (t - \eta)^{-\frac{1}{2}} I_{0+}^\alpha u(0, \eta) d\eta, \quad \int_0^t f_3(t, \eta) (t - \eta)^{-\frac{1}{2}} I_{0+}^\alpha u(0, \eta) d\eta,$$

принимая во внимание вид соотношение (6), заключаем, что полученное уравнение (6) при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ является интегральным уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью, которое однозначно и безусловно разрешимо [3].

Литература

1. Керфов А.А., Кумышев Р.М., О краевых задачах для нагруженного уравнения теплопроводности // Доклады Адыгской международной академии наук, **2**:1. — Нальчик, 1996. — 13–15.
2. Джон Ф., Берс М., Шехтер М. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966. — 352 с.
3. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. — М.: Изд-во Факториал Пресс, 2000. — 384 с.

ДИСКРЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПИСАНИЯ КОМПЛЕКТАЦИИ ЗАКАЗОВ ДЛЯ СКЛАДСКИХ СИСТЕМ С АВТОМАТИЗИРОВАННЫМ КОНВЕЙЕРНЫМ ОБОРУДОВАНИЕМ

А.В. Теплов

anton.teplov163@yandex.ru

УДК 004.942

Работа посвящена оперативному планированию последовательной зональной комплектации заказов на конвейерной линии с ручными станциями сборки. Для конечной партии заказов сформулирована согласованная дискретная модель расписания в режиме «без ожиданий» внутри маршрута заказа и непересекаемости на станциях. Цель — минимизация общего времени завершения партии (makespan) посредством выбора индивидуальных моментов запуска контейнеров на магистраль при фиксированном порядке станций. Представлены правила агрегации длительностей по станциям и процедура построения допустимого расписания с контролем конфликтов, а также визуализация (диаграммы Ганта).

Ключевые слова: складская логистика; зональная комплектация; конвейерные системы; минимизация makespan; дискретное моделирование; диаграммы Ганта.

Введение

Конвейерные линии последовательной зональной комплектации применяются там, где нужно быстро собирать много мелких заказов при ограниченных человеческих ресурсах. Контейнер движется по магистрали и съезжает на те станции, где требуется подбор позиций заказа. Эффективность такой системы определяется не только нормами времени на отбор, но и согласованием моментов запуска заказов и их пересечений на «узких» станциях. Именно несбалансированная загрузка зон чаще всего растягивает цикл партии. Обзорные статьи по дизайну и управлению отбором подчёркивают, что решения уровня запуска/очерёдности оказывают сопоставимое влияние на производительность, как и классические приёмы хранения и маршрутизации, но исследованы заметно слабее в сочетании с конвейерной организацией зонального отбора [1]. В работе рассматривается практический класс систем: один общий порядок станций вдоль конвейера; каждому SKU (storage keeping unit – единица товара или артикул) заранее сопоставляется допустимая станция с минимальным нормативным временем отбора; между станциями отсутствуют буфер и ожидания внутри маршрута заказа; планирование ведётся в дискретном времени. Такая формализация сводит задачу к совместному выбору порядка запусков партии и индивидуальных моментов запуска так, чтобы минимизировать общее время завершения партии (makespan) при строгой непересекаемости на станциях. Подход укладывается в логику «поточный цех без ожидания» (no-wait flow shop),

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2025-179.

Теплов Антон Владимирович, ИТ аналитик, ООО "ССИ Решения" (Самара, Россия); Anton Teplov (Samara, Russia)

но с наложенными складскими особенностями (конвейерная топология и агрегирование длительностей по станциям) [2]. С помощью математического моделирования для фиксированного порядка вычисляются минимально допустимые целочисленные времена запуска без конфликтов на станциях для поиска оптимального времени расписания всех заказов (makespan). Такой путь совместим с эксплуатационной практикой и хорошо сочетается с современными оценками пропускной способности и задержек в последовательных зональных системах [3].

В работе формализованы обозначения (множества заказов, станций и артикулов), введены параметры доступности и норм времени подбора, выведены длительности работ заказа на станциях, а затем задана модель расписания с условиями непересекаемости и целевой функцией, определяющей общую длительность комплектации всех заказов.

Постановка задачи

Рассматривается система с магистральным автоматизированным конвейером, последовательно проходящим мимо множества ручных станций подбора. Дана конечная партия заказов

$$r = 1, \dots, R$$

которые должны быть собраны на станциях

$$s = 1, \dots, S$$

Каждый заказ $r \in R$ содержит набор позиций из множества SKU

$$i = 1, \dots, I$$

Требуемое количество единиц SKU i в заказе r задано параметром

$$d_{r,i} \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{если } d_{r,i} = 0, \text{ то SKU } i \text{ не входит в заказ } r).$$

Каждая станция $s \in S$ характеризуется доступностью номенклатур SKU и скоростями их обработки:

$$a_{s,i} \in \{0, 1\} \quad (\text{возможность отбора SKU } i \text{ на станции } s).$$

$$t_{s,i} \geq 0 \quad (\text{время отбора одной единицы SKU } i \text{ на станции } s).$$

Параметры $a_{s,i}$ и $t_{s,i}$ считаются известными (из тестовых замеров и опытной эксплуатации).

Для каждого SKU выбирается допустимая станция с минимальным временем обработки:

$$s^*(i) = \arg \min_{s \in S: a_{s,i}=1} t_{s,i}.$$

Суммарная продолжительность работ по заказу r на станции s :

$$\text{dur}_{r,s} = \sum_{i \in I: s=s^*(i)} d_{r,i} t_{s,i} \quad (1).$$

Физически контейнер с заказом останавливается только на тех станциях, где $\text{dur}_{r,s} > 0$.

Запуски по конвейеру допускаются неравномерными, интервалы между соседними заказами могут различаться. Время запуска заказа r обозначено U_r . Для каждой задействованной станции s введены моменты начала и окончания работ:

$$T_{r,s}^{\text{proc}}, \quad T_{r,s}^{\text{end}} = T_{r,s}^{\text{proc}} + \text{dur}_{r,s}.$$

Последовательность посещения станций предопределена структурой конвейера, обработка на следующей станции начинается только после завершения на предыдущей:

$$T_{r,s_{j+1}}^{\text{proc}} \geq T_{r,s_j}^{\text{end}}.$$

Обработка заказа начинается на первой для него станции ровно в момент запуска,

$$T_{r,s_{\text{first}}(r)}^{\text{proc}} = U_r.$$

Ресурсные ограничения на станциях: в каждый момент времени станция обслуживает не более одного заказа. Для любых $r_1 \neq r_2$ и станции s , где $\text{dur}_{r_1,s} > 0$ и $\text{dur}_{r_2,s} > 0$,

$$[T_{r_1,s}^{\text{proc}}, T_{r_1,s}^{\text{end}}) \cap [T_{r_2,s}^{\text{proc}}, T_{r_2,s}^{\text{end}}) = \emptyset.$$

Оптимизация проводится по критерию минимального общего времени завершения всех операций (makespan). Величина makespan определяется как наибольшее значение времени окончания обработки среди всех заказов и соответствующих им станций:

$$T = \max_{r \in R} \max_{s: \text{dur}_{r,s} > 0} T_{r,s}^{\text{end}} \quad (2).$$

Моделирование расписания. Пусть задана перестановка заказов:

$$\pi = (r_1, r_2, \dots, r_R),$$

а времена запусков на линию $\{U_r\}_{r \in R}$ выбираются свободно (неравномерно), с целью минимизировать makespan при соблюдении ограничений модели «без ожиданий» внутри маршрута каждого заказа и непересекаемости на станциях. Маршрут заказа r по задействованным станциям обозначен как $s_1, s_2, \dots, s_{m(r)}$. Построение и проверка допустимости расписания. Для заданной перестановки π расписание формируется дискретной процедурой с шагом 1 секунда. На каждой станции ведётся календарь занятости (набор уже назначенных интервалов), а для очередного заказа r_k выбирается минимальный целочисленный момент $t \geq 0$, при котором непрерывная цепочка его интервалов не пересекается с календарями всех задействованных станций:

$$[t, t + \text{dur}_{r_k, s_1}), [t + \text{dur}_{r_k, s_1}, t + \text{dur}_{r_k, s_1} + \text{dur}_{r_k, s_2}), \dots$$

Если конфликт обнаружен, t увеличивается на 1 секунду и проверка повторяется. Как только конфликтов нет, интервалы заказа r_k фиксируются,

$$U_{r_k} = t, \quad T_{r_k, s_1}^{\text{proc}} = t, \quad T_{r_k, s_{j+1}}^{\text{proc}} = T_{r_k, s_j}^{\text{end}},$$

после чего моделирование переходит к следующему заказу. По завершении всех заказов вычисляется T (2). Для гарантии остановки вводится верхняя граница горизонта как функция данных,

$$H = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \text{dur}_{r,s} \quad (3).$$

что является тривиальной допустимой оценкой сверху на T .

Применяя описанный выше алгоритм, составлено расписание цикла сбора заказов для смены. Минимальный makespan для 9 заказов составил $T_{min} = 836$ секунд (рис. 1).

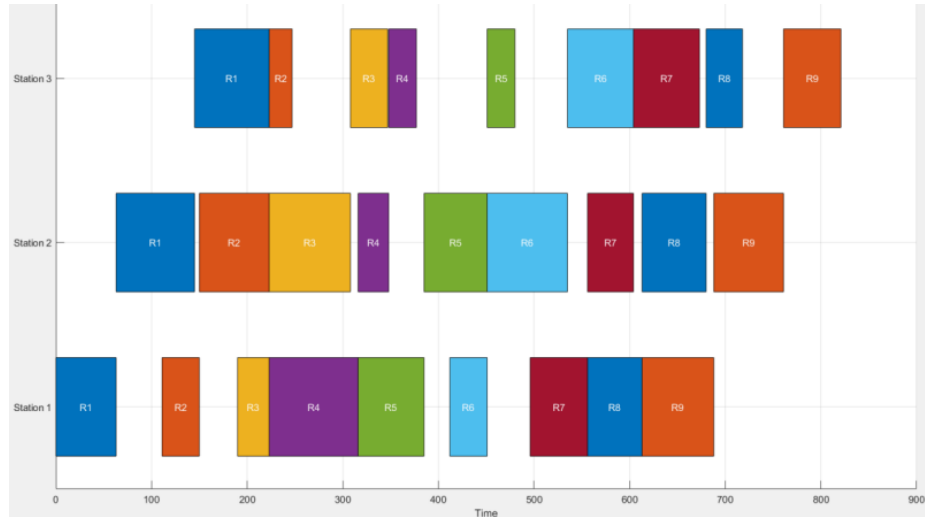


Рис. 1: Диаграмма Ганта расписания сборки заказов

Метки R1-R9 обозначают идентификаторы заказов. По оси ординат отложены станции, по оси абсцисс – время. Цветные отрезки представляют интервалы, в течение которых определённый заказ выполняется на данной станции. Видно, что ни на одной станции одноцветные блоки (один и тот же заказ) не перекрываются, что подтверждает отсутствие конфликтов. Станция 2, будучи самой загруженной, практически непрерывно занята разными заказами с начала и до конца цикла. Таким образом, именно станция 2 выступает определяющим узким местом, рабочее время которого использовано предельно эффективно.

Выводы

В работе сформулирована и исследована задача оперативного планирования последовательной зональной комплектации заказов на конвейерной линии с ручными станциями. При принятых допущениях задача редуцирована к совместному выбору порядка запуска партии и индивидуальных моментов запуска заказов с целью минимизации общего времени завершения партии (makespan) при строгой непересекаемости на станциях.

Показана корректная агрегация требований по заказу в длительности на станциях и сформирована согласованная модель расписания в режиме «без ожиданий», позволяющая исключить маршрутный выбор из оптимизации

без потери практической применимости. Разработан дискретно-событийный алгоритм построения расписания сбора заказов имитационного построения расписания, который, для заданного порядка, находит минимально допустимые целочисленные времена запусков и гарантирует отсутствие конфликтов на станциях. Добавлена наглядная визуализация (диаграммы Ганта), позволяющая быстро выявлять узкие места и проверять соблюдение ограничений непересекаемости.

Совместная оптимизация назначения SKU станциям и порядка запусков, Эмпирическая калибровка и сравнение эвристик перестановок на промышленных наборах, а также разработка метамоделей для предварительной оценки выигрыша видится перспективным направлением дальнейших исследований.

Литература

1. *de Koster R., Le-Duc T., Roodbergen K.J.*, Design and control of warehouse order picking: A literature review // *EJOR*, 182(2) (2007), 481–501.
2. *Allahverdi A.*, A survey of scheduling problems with no-wait in process // *EJOR*, 255(3) (2016), 665–686.
3. *van der Gaast J. et al.*, Capacity analysis of sequential zone picking systems // *Operations Research*, 68(1) (2020), 161–179.

РЕДУКЦИЯ МОДЕЛИ ДОСТАВКИ ЛЕКАРСТВ ПРИ НАЛИЧИИ БЫСТРОГО СВЯЗЫВАНИЯ С БЕЛКАМИ КРОВИ

Е.А. Тропкина

elena_a.85@mail.ru

УДК 517.928

Работа посвящена понижению размерности модели доставки лекарственных средств при наличии быстрого связывания с белками крови. Применяемый математический аппарат основан на геометрической теории сингулярных возмущений. Для редукции системы используется параметрический способ задания медленных инвариантных многообразий.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, редукция, интегральное многообразие, асимптотическое разложение, дифференциальные уравнения, параметризация, быстрые переменные, медленные переменные.

В работе рассматривается задача, связанная с моделированием двух лекарственных препаратов, вводимых одновременно через катетер непосредственно в кровоток (внутривенная доставка лекарств) в случае конкурентного связывания с одним и тем же белком:

$$\varepsilon \frac{dx_1}{dt} = -k_1 x_1 (z^* - y_1 - y_2) + k_2 y_1 - \varepsilon (\alpha_1 x_1 - h_1), \quad (1)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{dt} = -k_3 x_2 (z^* - y_1 - y_2) + k_4 y_2 - \varepsilon (\alpha_2 x_2 - h_2), \quad (2)$$

$$\varepsilon \frac{dy_1}{dt} = k_1 x_1 (z^* - y_1 - y_2) - k_2 y_1, \quad (3)$$

$$\varepsilon \frac{dy_2}{dt} = k_3 x_2 (z^* - y_1 - y_2) - k_4 y_2, \quad (4)$$

где x_1, x_2 – концентрации первого и второго лекарственного средства, y_1, y_2 – концентрации белковых молекул, связанных с первым и вторым лекарством соответственно, k_1, k_2, k_3, k_4 – скорости реакций прямого и обратного связывания с белком, ε – малый положительный параметр.

Сложив выражения (1) и (3), а также (2) и (4), после замены $x_1 + y_1 = z_1$, $x_2 + y_2 = z_2$, придем к сингулярно возмущенной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_1}{dt} = -\alpha_1 x_1 + h_1, \quad (5)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = -\alpha_2 x_2 + h_2, \quad (6)$$

$$\varepsilon \frac{dx_1}{dt} = -k_1 x_1 (z^* - z_1 - z_2 + x_1 + x_2) + k_2 (z_1 - x_1) - \varepsilon (\alpha_1 x_1 - h_1), \quad (7)$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{dt} = -k_3 x_2 (z^* - z_1 - z_2 + x_1 + x_2) + k_4 (z_2 - x_2) - \varepsilon (\alpha_2 x_2 - h_2). \quad (8)$$

Исследование выполнено за счет средств государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (шифр проекта FSSS-2026-0009).

Тропкина Елена Андреевна, к.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Elena Tropkina (Samara University, Samara, Russia)

Целью работы является понижение размерности системы (5)–(8). Для этого используется метод интегральных многообразий, причем многообразие строится в параметрическом виде

$$z_1 = z_1(x_1, x_2, \varepsilon) = z_{10}(x_1, x_2) + \varepsilon z_{11}(x_1, x_2) + O(\varepsilon^2), \quad (9)$$

$$z_2 = z_2(x_1, x_2, \varepsilon) = z_{20}(x_1, x_2) + \varepsilon z_{21}(x_1, x_2) + O(\varepsilon^2). \quad (10)$$

Здесь качестве параметров выбраны быстрые переменные x_1 и x_2 .

Поиск коэффициентов разложений (9), (10) привел к следующим результатам:

$$z_{10} = x_1 + \frac{k_1 k_4 x_1 z^*}{M},$$

$$z_{20} = x_2 + \frac{k_2 k_3 x_2 z^*}{M},$$

$$\begin{aligned} z_{11} = & \frac{1}{M^3 - M k_2 k_4 z^* [k_3 k_1 (x_1 + x_2) + k_2 k_3 + k_1 k_4]} \times \\ & \times \left[\left((k_4 + k_3 x_2)^2 + k_1 k_3 x_1 x_2 + \frac{k_2 k_3 k_4 z^* (k_4 + k_3 x_2)}{M} \right) k_1 k_2 k_4 z^* (\alpha_1 x_1 - h_1) - \right. \\ & \left. - \left(k_2 + k_1 x_1 + k_3 x_2 + k_4 + \frac{k_2 k_4 z^*}{M} \right) k_1 k_2 k_3 k_4 x_1 z^* (\alpha_2 x_2 - h_2) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{21} = & -\frac{1}{M^3 - M k_2 k_4 z^* [k_3 k_1 (x_1 + x_2) + k_2 k_3 + k_1 k_4]} \times \\ & \times \left[\left(k_1 x_1 + k_2 + k_4 + k_3 x_2 + \frac{k_2 k_4 z^*}{M} \right) k_1 k_2 k_3 k_4 x_2 z^* (\alpha_1 x_1 - h_1) - \right. \\ & \left. - \left((k_2 + k_1 x_1)^2 + k_1 k_3 x_1 x_2 + \frac{k_2 k_4 z^* (k_2 + k_1 x_1)}{M} \right) k_2 k_3 k_4 z^* (\alpha_2 x_2 - h_2) \right]. \end{aligned}$$

Тогда вместо исходной системы (5)–(8) можно рассмотреть систему второго порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{k_1 x_1}{\varepsilon} (z^* - z_1 - z_2 + x_1 + x_2) + \frac{k_2}{\varepsilon} (z_1 - x_1) - (\alpha_1 x_1 - h_1),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{k_3 x_2}{\varepsilon} (z^* - z_1 - z_2 + x_1 + x_2) + \frac{k_4}{\varepsilon} (z_2 - x_2) - (\alpha_2 x_2 - h_2).$$

где z_1 и z_2 определяются выражениями (9) и (10).

Литература

1. *Соболев В.А., Щепаккина Е.А.* Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. — Москва: Физматлит, 2010.
2. *Соболев В.А., Тропкина Е.А., Щепаккина Е.А.*, Параметризация инвариантных многообразий медленных движений // Вестник Самарского университета. Естественная серия, **24**:4 (2018), 33–40.
3. *Kalachev L.*, Reduced models of drug delivery in the presence of fast protein binding // Mathematics in Engineering, **7**:2 (2025), 162–177.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОТРЕБНОСТИ В СПЕЦИАЛИСТАХ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Е.П. Тупоносова, П.А. Голованов

alenushka1982@inbox.ru, golovanov1951@inbox.ru

УДК 681.5.011

В работе рассмотрены вопросы построения математических моделей влияния кадрового обеспечения на эффективность функционирования промышленности. Система подготовки кадров для промышленности рассматривается в терминах управления сложными объектами в виде модели «черный ящик». Выявлены входные управляющие и возмущающие факторы, которые воздействуют на систему. В качестве выходных переменных, могут быть определены количественные показатели приема и выпуска по всему спектру направлений и специальностей или количественные показатели трудоустройства молодых специалистов. Математические модели кадрового обеспечения для промышленности предлагается стоять в форме производственных функций, а для построения прогноза по математической модели в форме производственных функций необходимо на основании прогноза входных параметров рассчитать новые значения выходного параметра.

Ключевые слова: математическая модель, кадровое обеспечение, модель «черный ящик», производственные функции, образование, вуз, специалисты, входные управляющие и возмущающие факторы, выходные переменные, прогноз.

В настоящее время очень актуальны вопросы взаимосвязи образования и промышленности, адаптации молодых специалистов и трудоустройства выпускников вузов, так как такое взаимодействие очень выгодно и для самих предприятий, и для высшего образования и для государства.

Для прогнозирования потребности в специалистах для промышленности целесообразным является применение математического моделирования на основе структурной и параметрической модели по реальным статистическим показателям функционирования системы инженерного образования.

Систему образования будем рассматривать в терминах управления сложными объектами в виде модели «черный ящик». Обсуждаемая задача ставится как переход системы из существующего начального состояния в желаемое конечное состояние, за определенное время, учитывая большое количество факторов. На систему воздействуют входные факторы или входные ресурсы, с помощью которых можно целенаправленно управлять поведением объекта и получить результат. Входные характеристики выбираются с учетом влияния их на ход производственно-экономических процессов. Входные характеристики подразделяются на управляющие (местные и государственные органы власти, вузы, финансирующие структуры и другие) и возмущающие (конъюнктура рынка, средства массовой информации,

Тупоносова Елена Павловна, к.т.н., доцент, Самарский государственный технический университет (Самара, Россия); Elena Tuponosova (Samara State Technical University, Samara, Russia)

Голованов Павел Александрович, старший преподаватель, Самарский государственный технический университет (Самара, Россия); Pavel Golovanov (Samara State Technical University, Samara, Russia)

позиция профессорско-преподавательского состава, демографические проблемы и т.д.). В качестве выходных характеристик понимаются величины, описывающие функционирование экономического объекта [1, 2].

Выходные характеристики можно конкретизировать следующим образом: количественные показатели приема, выпуска и трудоустройства молодых специалистов; качество подготовки; степень удовлетворенности промышленности выпускниками инженерных вузов; степень удовлетворенности выпускников инженерных вузов своей профессией; соответствие предложения и спроса, наличие вакансий и уровень безработицы.

Если учитывать немного факторов, то математическая модель оказывается достаточно простой и по ней будет легко получить явное решение, однако математическая модель получится грубой и не описывает полностью процесс. Если же учитывать достаточно много факторов, модель оказывается весьма точной, но процесс ее вычисления также усложняется. Потому необходимо построить оптимальную модель, чтобы был баланс между факторами, полнотой и точности модели.

Любая отрасль промышленности, предпринимательство и бизнес нуждаются в подготовленных специалистах, определяя требования к выпускникам образовательных учреждений на современном этапе развития общества. Образование должно учитывать современные требования рынка труда и работодателей, обуславливая конкурентоспособность и востребованность своих выпускников.

Если учебные заведения будут только выпускать специалистов нацеленных на перспективные работы в промышленности, но тогда текущее состояние промышленности будет нарушено, либо, если будет выпускаться специалисты только по запросам отрасли, то не будет прогресса. Для расчета оптимального числа специалистов, необходимо составить систему управления и построить математические модели кадрового обеспечения для промышленности.

Задача управления системой высшего образования рассматривается в общих терминах теории управления системами. Состояние системы на каждом конкретном этапе ее развития может быть отражено некоторой моделью состояния, характеризуемой набором структурных и количественных параметров.

На систему воздействуют входные факторы, которые с известной степенью условности могут быть подразделены на управляющие (органы государственного управления; местные органы власти; неправительственные структуры, представляющие интересы промышленности; финансирующие структуры; органы вузовского самоуправления и их ассоциации и т.д.) и возмущающие (общественное мнение; средства массовой информации; молодежное движение; позиции профессорско-преподавательского состава и др.).

В качестве выходных переменных, характеризующих состояние системы, могут быть определены такие факторы как: количественные показатели приема и выпуска по всему спектру направлений и специальностей; количественные показатели трудоустройства молодых специалистов по нескольким временным срезам; и другие.

К характеристикам подготовки специалистов можно отнести объемы и направления обучения; глубину и качество подготовки; показатели трудоустройства. К показателям эффективности можно отнести качество под-

готовки, степень удовлетворенности промышленности, степень удовлетворенности выпускников; доступность образования и главное, соответствие спроса и предложений.

Для построения математических моделей прогнозирования потребности в специалистах можно использовать математические модели в форме производственных функций, которые описывают взаимосвязь между затратами различных ресурсов и результатом. Структурная идентификация моделей, полученных на основе производственных функций, проводится на реальной статистике функционирования систем взаимодействия вуза, производства и общества [3].

Математические модели в форме производственных функций подходят для анализа использования трудовых и капитальных ресурсов средних и крупных производственных объектов, которые характеризуются устойчивым и стабильным функционированием. К такому объекту как раз и относится кадровое обеспечение для промышленности [1–4].

Эффективность входных ресурсов оценивается по вкладу подготовленных специалистов в совокупный общественный продукт по факторным эластичностям. Для построения прогноза по математической модели в форме производственных функций необходимо на основании прогноза входных параметров рассчитать новые значения выходного параметра.

В целом, задача определения потребности в специалистах с высшим образованием на ближайшую и более отдаленную перспективу является весьма актуальной, но сложной и применение модельного анализа дает возможность повысить эффективность прогнозов на будущее.

Литература

1. Дилигенский Н.В., Гаврилова А.А., Цапенко М.В. Построение и идентификация математических моделей производственных систем. — Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2005
2. Замков О.О. Математические методы в экономике. — М.: МГУ, изд-во «Дело и сервис», 1999.
3. Клейнер Г.Б. Производственные функции: Теория, методы, применение. — М.: Финансы и статистика, 1986.
4. Тупоносова, Е.П. Управление кадровым обеспечением регионального производственного комплекса "вуз — нефтяной кластер": диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, 2023. — 208 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АВТОНОМНЫХ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ АГЕНТОВ ДЛЯ ПЕРСОНАЛИЗАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

М.Е. Федина, В.Ю. Живцов, Е.О. Манякова

phedina@ssau.ru, zhivtsov@samsmu.ru, manikova.liza5@mail.ru

УДК 7.018, 004.8

В статье рассматриваются возможности автономных интеллектуальных агентов в обеспечении персонализированных образовательных траекторий в высшем образовании. Показано, что использование аналитических и диалоговых модулей на основе искусственного интеллекта повышает точность оценки учебной активности и качество индивидуальной поддержки студентов. Рассмотрены мультиагентные протоколы взаимодействия, обеспечивающие согласованное взаимодействие интеллектуальных компонентов в образовательной экосистеме.

Ключевые слова: адаптивное обучение, искусственный интеллект, автономные интеллектуальные агенты, персонализированные образовательные траектории

Современное высшее образование вынуждено отвечать на вызовы времени, стремясь предоставить максимально персонализированное обучение, формирующее у студентов адаптивные компетенции, востребованные в быстро меняющемся мире. В этих условиях всё больше внимания уделяется технологиям искусственного интеллекта (ИИ), которые способны собирать и анализировать цифровой след, моделируя поведение обучающихся. [1] Одним из наиболее перспективных направлений в образовании является применение автономных интеллектуальных агентов, способных самостоятельно взаимодействовать со студентами и принимать решения для достижения поставленных целей. Появление больших языковых моделей, таких как GPT-5, расширило возможности воспринимать естественный язык и генерировать осмысленные ответы до практически человеческого уровня, что позволяет выступать в роли виртуальных наставников или помощников, гибко подстраиваясь под уровень знаний и стиль восприятия конкретного студента. [2, 3]

Персонализация образовательных траекторий подразумевает построение индивидуального учебного пути, подбор дисциплин, темпа и методов обучения с учётом имеющихся знаний, способностей, целей и предпочтений, что может выражаться, например, в гибком выборе элективных курсов, адаптации сложности заданий под уровень подготовки или в особых рекомендациях по внеучебным активностям под карьерные планы. Практические исследования подтверждают значительные преимущества подхода. Внедрение адаптивных систем обучения с элементами ИИ в 8 россий-

Федина Мария Ефимовна, к.ф.м.н., доцент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева (Самара, Россия); Fedina Maria Efimovna (Samara National Research University, Samara, Russia)

Живцов Владимир Юрьевич, к.пед.н., проректор по административной, социальной и воспитательной работе, Самарский государственный медицинский университет (Самара, Россия); Zhivtsov Vladimir Yuryevich (Samara State Medical University, Samara, Russia)

Манякова Елизавета Олеговна, студент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева (Самара, Россия); Manyakova Elizaveta Olegovna (Samara National Research University, Samara, Russia)

ских технических университетах в период 2020–2023 годы позволило поднять средний академический балл студентов на 0,73 (по пятибалльной шкале) и увеличило показатели удержания (продолжения обучения) на 27% по сравнению с традиционными методиками. [4] Персонализированное обучение также положительно сказывается на вовлечённости, в случае соответствия содержания и темпа образовательного процесса возможностям студента, мотивация и интерес к учебному процессу сохраняется продолжительное время. Благодаря постоянной обратной связи и учёту индивидуальных особенностей достигается более глубокий уровень знаний и уверенное продвижение в рамках образовательного трека.

Каждый студент оставляет обширный цифровой след в виде данных об успеваемости, активности в электронных обучающих системах, результатах тестов, просмотренных материалах и даже о стиле поведения при обучении. Автономные агенты способны выступать в роли аналитиков, обрабатывающих эти разнородные данные с помощью методов машинного обучения. Выявление скрытых закономерностей позволяет с определённой точностью прогнозировать будущие оценки и обнаруживать учащихся в группе риска академической неуспеваемости или отчисления. [5, 6] Благодаря алгоритмам обработки естественного языка, обучающие агенты ведут диалог в привычной форме, подсказывают, задают наводящие вопросы, разбивают сложную задачу на последовательность шагов. При этом они учитывают как академические показатели, так и индивидуальные предпочтения в обучении.

Для охвата всех аспектов индивидуализации может использоваться мультиагентная система, в которой различные компоненты выполняют специализированные функции, взаимодействуя между собой для достижения общей цели. Например, можно выделить роль аналитика для сбора данных о прогрессе и моделирования профиля учащегося и роль наставника для настройки учебного контента и взаимодействия со студентом на основе подготовленного профиля. Общение между агентами происходит на естественном языке через формализованные сообщения, что делает процесс прозрачным и интерпретируемым. [7]

Появление мультиагентных систем в образовательной сфере обусловило необходимость унификации механизмов их взаимодействия друг с другом и с внешними цифровыми платформами. В период 2024–2025 годов сформировался ряд открытых инициатив, направленных на создание согласованных протоколов обмена сообщениями между интеллектуальными компонентами. Среди них выделяется протокол Agent-to-Agent (A2A) [8], разработанный компанией Google и впоследствии переданный под управление Linux Foundation, который устанавливает общий формат представления данных и регламентирует процедуры прямой коммуникации между автономными ИИ-модулями при выполнении координированных задач. Дополнительным направлением стала инициатива Agent Communication Protocol (ACP) [9], созданная в IBM Research с целью обеспечения совместимости и стандартизированных каналов взаимодействия для систем с разнородными архитектурами искусственного интеллекта. В августе 2025 года обе инициативы были консолидированы, проект ACP официально интегрирован в A2A под эгидой Linux Foundation, что позволило сформировать единый, более универсальный стандарт обмена данными между автономными агентами и обеспечить согласованность механизмов коммуникации в развивающейся

экосистеме мультиагентных систем.

Параллельно компания Anthropic представила Model Context Protocol (MCP), ориентированный на подключение интеллектуальных систем к внешним сервисам и хранилищам данных. [10] Данный механизм формирует единый интерфейс обращения к распределённым ресурсам и обеспечивает контролируемый доступ к необходимым сведениям, включая репозитории знаний, цифровые библиотеки, платформы дистанционного обучения и иные специализированные источники. Функция MCP заключается в организации связующего уровня между ИИ-агентом и цифровыми экосистемами, что позволяет оперативно привлекать релевантные материалы и адаптировать образовательный процесс к текущим потребностям. Сочетание архитектурных возможностей A2A и MCP формирует технологическую базу для построения согласованной системы взаимодействия автономных компонентов.

Интеграция больших языковых моделей усилила потенциал интеллектуальных модулей в интерпретации контекста и формировании развернутых объяснений, обеспечив гибкую и содержательную обратную связь, включая мультимодальную обработку речи, текста и графических материалов. [11] Семантические модели знаний придали структурированное представление предметных областей и профессиональных профилей, что создало основу для выстраивания согласованных с индивидуальными целями обучающего образовательных траекторий.

Несмотря на очевидные успехи и перспективы, использование автономных интеллектуальных систем в высших учебных заведениях сопровождается технологическими и методологическими ограничениями, поскольку исследования в этой области пока не образуют целостной теоретической основы и нередко рассматривают изолированные функции без учета архитектуры комплексной персонализирующей платформы. Отсутствие единых методик оценки эффективности усложняет сопоставление результатов, что делает необходимым переход к длительным и стандартизированным исследованиям, позволяющим определить устойчивые механизмы влияния таких систем на качество обучения. Дополнительные сложности связаны с защитой информации и соблюдением этических норм, поскольку обработка данных об учебной активности требует строгих процедур конфиденциальности, а применяемые алгоритмы должны выявлять и устранять возможные искажения, чтобы избежать рисков несправедливых рекомендаций. Важную роль играет проблема академической честности, которая требует разработки встроенных механизмов контроля, ограничивающих нежелательные формы помощи и направляющих учащегося к самостоятельному освоению материала. Оптимальной представляется гибридная модель, объединяющая вычислительные возможности интеллектуальных систем с профессиональной компетентностью преподавателя, при которой автономные модули обеспечивают оперативный мониторинг и поддержку, а педагог осуществляет стратегическое руководство и сохраняет ответственность за образовательные решения.

С учётом рассмотренных факторов целесообразно сформировать поэтапную стратегию внедрения интеллектуальных систем в университетскую среду, начиная с ограниченных пилотных проектов, позволяющих оценить функционирование цифровых помощников и выявить требования к последующей интеграции. На ранних стадиях необходимо обеспечить корректное

взаимодействие таких решений с существующей инфраструктурой, включая безопасный доступ к академическим данным и использование совместимых протоколов обмена информацией, что создаст техническую основу для масштабирования. Параллельно требуется подготовить педагогические кадры, формируя компетенции работы с интеллектуальными инструментами и создавая условия для гармоничного включения ИИ в образовательную практику. По мере развития технологий возможно переходить к комплексным платформам сопровождения, в рамках которых динамическая виртуальная модель обучающегося обеспечивает согласованное управление индивидуальной траекторией и адаптацию маршрута к изменяющимся целям. В перспективе такая архитектура должна поддерживать многоуровневое взаимодействие автономных цифровых модулей с преподавателями и административными структурами вуза, формируя гибкую экосистему, ориентированную на повышение качества обучения и раскрытие потенциала каждого студента.

Автономные интеллектуальные системы обладают значительным потенциалом для формирования гибкой образовательной среды как новой образовательной модели, в которой персонализированная поддержка становится центральным элементом.

Литература

1. *Kabashkin I.*, AI-Based Digital Twins of Students: A New Paradigm for Competency-Oriented Learning Transformation [Электронный ресурс] / I. Kabashkin // Information, **16**:10 (2025), art. no. 846. — DOI: 10.3390/info16100846. — Режим доступа: <https://www.mdpi.com/2078-2489/16/10/846> (дата обращения: 06.10.2025).
2. *Олин Р. А.*, Экономика данных как движущая сила цифровой трансформации / Р. А. Олин // Наука XXI века: актуальные направления развития, 2–2 (2025), 169–174. — EDN EHNQHU.
3. *Олин Р. А.*, Гибридная рабочая сила в цифровой экономике / Р. А. Олин, М. Н. Осипов, А. В. Тимофеев // Экономика и предпринимательство, 10 (183) (2025), 386–390. — EDN HVBZYY.
4. *Бабин Ю. М.*, Исследование роли искусственного интеллекта в персонализации образовательных траекторий студентов технических вузов на основе анализа больших данных [Электронный ресурс] / Ю. М. Бабин // Журнал «Управление образованием: теория и практика», **15**:4–1, 36–49. — DOI: 10.25726/o4060-5128-5682-g. — Режим доступа: <https://www.emreview.ru/index.php/emr/article/view/2183> (дата обращения: 10.10.2025).
5. *Crompton H., Burke D.*, Artificial intelligence in higher education: the state of the field [Электронный ресурс] / H. Crompton, D. Burke // International Journal of Educational Technology in Higher Education, **20** (2023), art. no. 22. — DOI: 10.1186/s41239-023-00392-8. — Режим доступа: <https://educationaltechnologyjournal.springeropen.com/articles/10.1186/s41239-023-00392-8> (дата обращения: 17.10.2025).
6. *Олин Р. А.* Методы обеспечения безопасности данных в распределённых системах искусственного интеллекта / Р. А. Олин, В. В. Бондаренко // Актуальные проблемы радиоэлектроники и телекоммуникаций : Материалы Всероссийской научно-технической конференции, Самара, 20–23 мая 2025 года. — Самара: ООО "АРТЕЛЬ", 2025. — 198–200. — EDN ITHUTA.
7. *Портнов К. В.*, Смарт-контракты как инструмент автоматизации и оптимизации бизнес-процессов / К. В. Портнов, Р. А. Олин, Л. В. Ермолина // Экономика и предпринимательство, 10(183) (2025), 793–797. — EDN BFQVNO.

8. *Liao C. C., Liao D., Gadiraju S. S.* AgentMaster: A Multi-Agent Conversational Framework Using A2A and MCP Protocols for Multimodal Information Retrieval and Analysis [Электронный ресурс] / C. C. Liao, D. Liao, S. S. Gadiraju. — arXiv, 2025. — no. 2507.21105. — Режим доступа: <https://arxiv.org/html/2507.21105v1> (дата обращения: 17.10.2025).
9. Linux Foundation AI & Data Membership & Events. ACP Joins Forces with A2A under the Linux Foundation's LF AI & Data [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://lfaidata.foundation/communityblog/2025/08/29/acp-joins-forces-with-a2a-under-the-linux-foundations-lf-ai-data/> (дата обращения: 17.10.2025).
10. Model Context Protocol. Specification [Электронный ресурс] — 2025-06-18. — Режим доступа: <https://modelcontextprotocol.io/specification/> (дата обращения: 18.10.2025).
11. *Бондаренко В. В.* Анализ эффективности реализации алгоритмов хеширования в оптических вычислителях / В. В. Бондаренко, Р. А. Олин, М. А. Волохович // Актуальные проблемы радиоэлектроники и телекоммуникаций: Материалы Всероссийской научно-технической конференции, Самара, 20–23 мая 2025 года. — Самара: ООО "АРТЕЛЬ", 2025. — С. 201–203. — EDN OBJNSK.

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА КВАТЕРНИОННЫХ ВРАЩЕНИЙ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОРИЕНТАЦИИ НА БАЗЕ BLENDER PYTHON API

М.Н. Федоров, Д.А. Эздеков, И.Л. Сандлер,
С.А. Колпашиков, Н.А. Макаров

*kotika20000@gmail.com, tsg.limloki@mail.ru, sandler.il@ssau.ru,
skolpaschikov@mail.ru, m4ginik@yandex.ru*

УДК 004.94, 511.84, 004.42, 004.92

В работе разработан программный модуль для выравнивания трёхмерных объектов с использованием кватернионного описания вращений. Он обеспечивает корректное вычисление и применение поворотов объектов, предотвращает наложение и минимизирует ошибки ориентации. Реализация выполнена на Blender Python API с библиотекой *mathutils*. Модуль позволяет автоматически выравнивать множество объектов и получать сводную информацию о каждом, включая угловое расстояние до эталонного кватерниона. Программное средство может использоваться в задачах 3D-моделирования, компьютерной графики и робототехники.

Ключевые слова: кватернион, математика, трёхмерное моделирование, ориентация объектов, компьютерная графика, робототехника

Одной из актуальных задач трёхмерного моделирования, робототехники и компьютерной графики является корректное задание и управление ориентацией объектов в пространстве. При выполнении таких операций, как совмещение, стабилизация или выравнивание моделей, требуется точное математическое описание вращений, устойчивое к накоплению ошибок и лишённое неоднозначностей характерных для традиционных методов [1]. Среди различных способов представления пространственных поворотов особое место занимают кватернионы [2, 3], обладающие компактностью, отсутствием неопределённостей и удобством при вычислении композиции вращений.

Практическая реализация кватернионных вращений требует наличия инструментов, позволяющих не только задавать ориентацию объектов, но и выполнять их преобразования в трёхмерном пространстве с возможностью визуальной оценки результатов. Особенно актуальной является задача автоматизированного выравнивания множества объектов относительно эталонного ориентира, когда необходимо проверить корректность и точность

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение №075-02-2025-179.

Федоров Максим Николаевич, студент, ПривГУПС (Самара, Россия); Maxim Fedorov (Volga State Transport University, Samara, Russia)

Эздеков Дамир Азаматович, студент, ПривГУПС (Самара, Россия); Damir Ezdekov (Volga State Transport University, Samara, Russia)

Сандлер Илья Львович, лаборант-исследователь самарского подразделения НОМЦ ПФО, Самарский университет; ст. преп. кафедры АУТС, СамГТУ (Самара, Россия); Ilya Sandler (Samara University; SSTU, Samara, Russia)

Колпашиков Сергей Александрович, доцент, к.т.н., СамГТУ (Самара, Россия); Sergey Kolpaschikov (Samara State Technical University, Samara, Russia)

Макаров Никита Артемович, студент, СамГТУ (Самара, Россия); Nikita Makarov (Samara State Technical University, Samara, Russia)

вычисления угловых разностей, а также визуализировать процесс перехода между состояниями.

Разработанный программный модуль выполняет выравнивание трёхмерных объектов по эталонной ориентации с применением алгебры кватернионов [4, 5], который позволяет вычислять угловые расхождения между объектами, формировать корректные анимационные переходы и визуализировать результат в виде последовательного приближения к эталонному состоянию. Такая реализация может быть использована для тестирования алгоритмов ориентации в робототехнике, компьютерном зрении и системах трёхмерного моделирования, а также для подготовки демонстрационных и учебных сцен, иллюстрирующих принципы работы с кватернионными поворотами.

Пусть q_0 – эталонный кватернион ориентации объекта, q_i – кватернион исходной ориентации случайного объекта, тогда кватернион поворота q_r из положения q_i в положение q_0 можно рассчитать по формуле:

$$q_r = q_0 \circ q_i^{-1} \quad (1)$$

где

$$q_i^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|} \text{ – обратный кватернион;}$$

$$\bar{q} = w - xi - yj - zk \text{ – сопряженный кватернион;}$$

$$\|q\| = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \text{ – норма (длина) кватерниона.}$$

Таким образом, представленная формула (1) описывает механизм вычисления поворота между двумя ориентациями в пространстве, что позволяет определить, как именно необходимо повернуть объект из текущего положения q_i в эталонное положение q_0 . Кватернион поворота q_r задаёт направление и величину вращения, что позволяет реализовать плавное и точное выравнивание объектов.

Для практической реализации описанного математического аппарата и применения его к трёхмерным объектам требуется программная среда, обеспечивающая работу с кватернионами и управление ориентацией моделей. В качестве такой среды выбран **Blender** с использованием **Python API (bpy)** [6] и библиотеки **mathutils**, предоставляющей инструменты для операций с кватернионами. Класс «Quaternion» библиотеки «mathutils» позволяет задавать вращения через ось и угол и преобразовывать кватернионы в матрицы для применения к объектам сцены. Модуль **bpy** обеспечивает доступ к объектам, их трансформациям и визуализации, что позволяет реализовать процесс поворота и выравнивания объектов в автоматическом режиме.

Использование языка **Python** обеспечивает удобное взаимодействие с кватернионными вычислениями, генерацию случайных поворотов и применение интерполяции [7], сохраняя строгую математическую точность и воспроизводимость экспериментов. Таким образом, сочетание строгого математического описания и возможностей **Blender Python API** обеспечивает надёжную платформу для тестирования алгоритмов вращения [6,7].

Исходная сцена до выравнивания объектов, представленная на рисунке 1, является входным набором данных для тестирования разработанного

программного модуля.

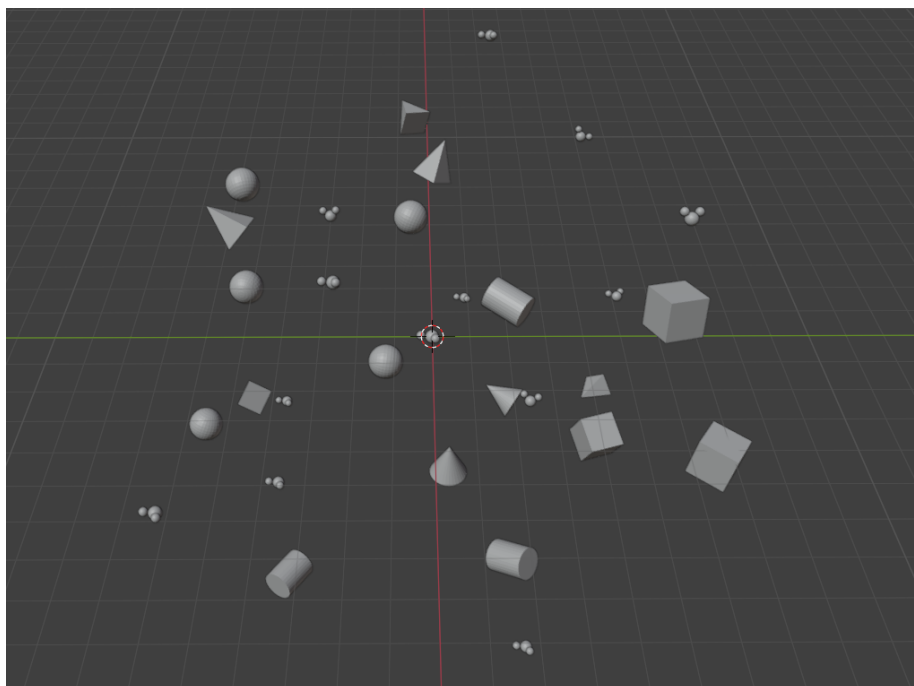


Рис. 1: Исходная сцена до выравнивания объектов

Исходная ориентация объекта, промежуточные положения на нескольких Кадр выравниваниях, а также итоговое положение после завершения выравнивания представлены на рисунках 2, 3, 4 и отражают процесс поэтапного выравнивания объектов по наименьшей траектории перемещения точек трехмерного объекта.

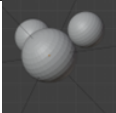
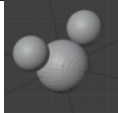
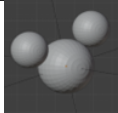
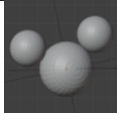
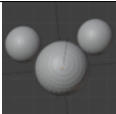
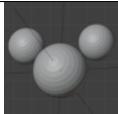
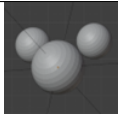
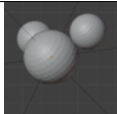
			
А – Эталонная ориентация	Б – Исходная ориентация	В – Кадр выравнивания №2	Г – Кадр выравнивания №8
			
Д – Кадр выравнивания №14	Е – Кадр выравнивания №20	Ж – Кадр выравнивания №25	З – Итоговая ориентация

Рис. 2: Процесс выравнивания объекта “Молекула воды”

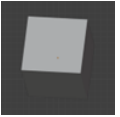
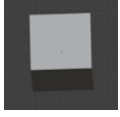
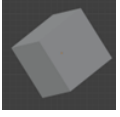
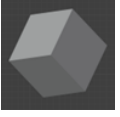
			
А – Эталонная ориентация	Б – Исходная ориентация	В – Кадр выравнивания №2	Г – Кадр выравнивания №8
			
Д – Кадр выравнивания №14	Е – Кадр выравнивания №20	Ж – Кадр выравнивания №25	З – Итоговая ориентация

Рис. 3: Процесс выравнивания объекта “Куб”

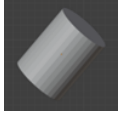
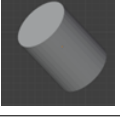
			
А – Эталонная ориентация	Б – Исходная ориентация	В – Кадр выравнивания №2	Г – Кадр выравнивания №8
			
Д – Кадр выравнивания №14	Е – Кадр выравнивания №20	Ж – Кадр выравнивания №25	З – Итоговая ориентация

Рис. 4: Процесс выравнивания объекта “Цилиндр”

Сводные окна, представленные на рисунке 5А-В, содержат основные характеристики процесса выравнивания: кватернион, определяющий ориентацию объекта в пространстве, его сходство с эталонным кватернионом, угловое расстояние между ними, а также диапазон Кадр выравнивания, в котором выполняется выравнивание.

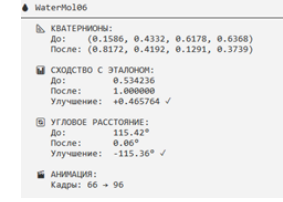
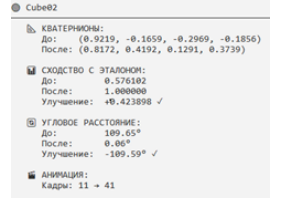
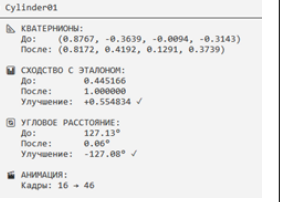
		
А	Б	В

Рис. 5: Сводное окно основных характеристик процесса выравнивания: “А” – объект “Молекула воды”; “Б” – объект “Куб”; “В” – объект “Цилиндр”

В результате работы программного модуля формируется трёхмерная сцена, включающая совокупность объектов различной геометрической формы, выровненных относительно эталонной ориентации. Каждый объект

подвергается вычисленному по формуле (1) кватернионному повороту, обеспечивающему совпадение его ориентации с эталонной, при этом сохраняя исходное положение в пространстве. Итоговая сцена, представленная на рисунке 6, демонстрирует эффективную работу разработанного программного модуля и служит базовой моделью для дальнейшего анализа и автоматизированной обработки трёхмерных объектов.

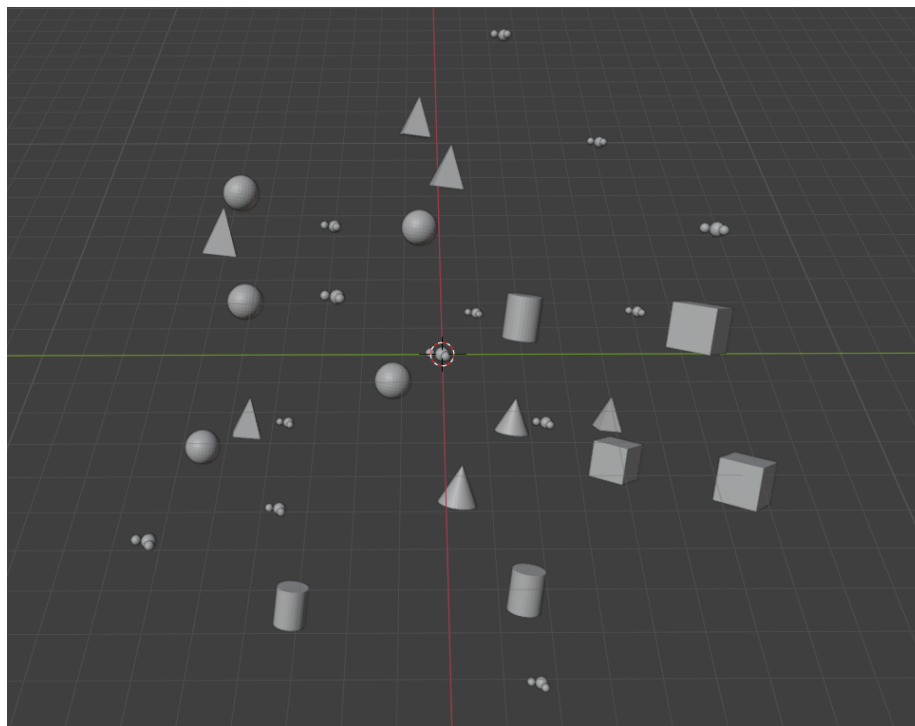


Рис. 5: Итоговая сцена после выравнивания

В ходе работы была разработана программная реализация алгоритма кватернионных вращений для выравнивания трёхмерных объектов относительно эталонной ориентации на базе Blender Python API. Практическая значимость работы заключается в возможности применения результатов работы для подготовки воспроизводимых тестовых наборов данных, проверки алгоритмов анализа ориентации объектов, а также в задачах трёхмерного моделирования, компьютерной графики и робототехники [6, 8, 9].

Литература

1. Буданов А.С., Егунов В.А. Использование углов Эйлера в инерциальных навигационных системах // Инженерный вестник Дона, 7(79) (2021), 120–127. — EDN YGQRTK.
2. Амелькин Н.И. Динамика твердого тела. — Москва : МФТИ, 2010. — 80 с. ISBN 978-5-7417-0347-2.
3. Митюшов Е.А., Мисюра Н.Е., Берестова С.А., К 175-летию открытия кватернионов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, **28**:4 (2018), 611–617. — DOI 10.20537/vm180412. - EDN YVNNHF.
4. Цегельник В.В., Стародубец А.С., Кватернионы, их представление и применение. Кватернионы и повороты пространства // Актуальные направления на-

учных исследований XXI века: теория и практика, **6:6(42)** (2018), 400–402. — EDN YUDMKD.

5. *Кравчук Е.В.*, Вращения в трехмерном пространстве и кватернионы // Вестник магистратуры, 2–2(77) (2018), 4–8. — EDN NRIDHB.

6. *Conlan Ch.*, Blender Python API: Precision 3D Modeling and Add-on Development. — Berkeley, CA: Apress, 2017. — XX, 138. — ISBN 978-1-4842-2801-2.

7. *Митюшов Е.А., Мисюра Н.Е., Берестова С.А.*, Плавное перемещение твердого тела в пространстве ориентаций по кратчайшей траектории через узлы однородной решетки на группе $SO(3)$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, **27:1** (2017), 138–145. — DOI 10.20537/vm170112. - EDN YGKWED.

8. *Дряба А.Ю.*, Построение 3D-модели объекта по набору его изображений при помощи нейронной сети на базе алгоритма NeRF // Математическая физика и компьютерное моделирование, **26:4** (2023), 31–42. — DOI 10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.3. — EDN QEDRRС.

9. *Приходько В.В.* Формализация решения обратной кинематической задачи для континуальных роботов в представлении кватернионов // XVI Всероссийская мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2023): Материалы мультиконференции. В 4-х томах, Волгоград, 11–15 сентября 2023 года / Редколлегия: И.А. Каляев, В.Г. Пешехонов, С.Ю. Желтов [и др.]. Том 1. — Волгоград: Волгоградский государственный технический университет, 2023. — 99–102. — EDN NFHJSI.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Т-НАПРЯЖЕНИЙ В АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ ПО ДАННЫМ МКЭ-ВЫЧИСЛЕНИЙ

М.А. Фомченкова

stepanova.lv@ssau.ru, fomchenkova.ma@yandex.ru

УДК 539.42, 519.6

Предложен переопределенный метод, основанный на полях напряжений в окрестности вершины трещины, для оценки коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) и Т-напряжения у вершины трещины при статическом нагружении. Напряжения в узлах вокруг вершины трещины, полученные методом конечных элементов (МКЭ), подставляются в разложение ряда М. Уильямса [1], где необходимо найти амплитудные множители с помощью переопределенной системы уравнений.

Ключевые слова: переопределенный метод, метод конечных элементов, анизотропия, коэффициент интенсивности напряжений, Т-напряжение, слагаемые высшего порядка

Для точного решения задач о трещинах все больше внимания уделяется не только КИН и Т-напряжению, но и другим коэффициентам высшего порядка разложения ряда М. Уильямса [2]. Был предложен модифицированный критерий максимальных тангенциальных напряжений [3], учитывающий влияние несингулярных членов напряжений (т.е. Т-напряжения и коэффициентов третьего порядка разложения ряда М. Уильямса) в дополнение к сингулярным членам напряжений (т.е. КИН) вокруг вершины трещины, для оценки поведения хрупких материалов при разрушении. Однако было довольно сложно точно получить коэффициенты третьего и высшего порядка разложения ряда М. Уильямса. В поисках простого и применимого метода был разработан переопределенный метод для извлечения КИН, Т-напряжения и коэффициентов высшего порядка разложения ряда Уильямса из полей напряжений у вершины трещины [4].

Асимптотическое представление полей напряжений:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} &= 2\text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1 - \mu_2} r^{\frac{n}{2}-1} \begin{bmatrix} f_{11}^1(\theta) \\ f_{22}^1(\theta) \\ f_{12}^1(\theta) \end{bmatrix} \right\} \\ &+ 2\text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1 - \mu_2} r^{\frac{n}{2}-1} \begin{bmatrix} f_{11}^2(\theta) \\ f_{22}^2(\theta) \\ f_{12}^2(\theta) \end{bmatrix} \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, r, θ — полярные координаты с полюсом в вершине трещины, μ_1, μ_2 — корни характеристического уравнения [2], a_n^1, a_n^2 — коэффициенты ряда, являющиеся функциями приложенной нагрузки и конфигурации образца, и подлежащие определению.

Здесь масштабные коэффициенты a_n^1, a_n^2 имеют вид:

$$a_1^1 = \frac{\sqrt{2a}}{4} \sigma \sin^2 \alpha; \quad a_1^2 = \frac{\sqrt{2a}}{4} \sigma \sin \alpha \cos \alpha; \quad a_2^2 = \frac{\sigma \text{Re}(\mu_1 + \mu_2)}{2 \text{Im}(\mu_1 \mu_2)} [\sin \alpha \cos \alpha - \lambda];$$

Фомченкова Мария Александровна, аспирант, Самарский университет (Самара, Россия); Mariya Fomchenkova (Samara University, Samara, Russia)

$$\begin{aligned}
a_2^1 &= \frac{\sigma}{2\text{Im}(\mu_1 + \mu_2)} [\cos^2 \alpha + \text{Re}(\mu_1 \mu_2) \sin^2 \alpha + \lambda \text{Re}(\mu_1 + \mu_2)]; \\
a_3^1 &= \frac{3}{8\sqrt{2a}} \sigma \sin^2 \alpha; \quad a_3^2 = \frac{3}{8\sqrt{2a}} \sigma \sin \alpha \cos \alpha; \quad a_{2n+2}^1 = a_{2n+2}^2 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \\
a_{2n+3}^1 &= \frac{(-1)^{n+1} \sigma \sin^2 \alpha}{8(2a)^{n+\frac{1}{2}}} \left[-4 \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} + \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right]; \\
a_{2n+3}^2 &= \frac{(-1)^{n+1} \sigma \sin \alpha \cos \alpha}{8(2a)^{n+\frac{1}{2}}} \left[-4 \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} + \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right]
\end{aligned}$$

Угловые функции $f_{ij}^m(\theta)$ ($m = 1, 2$) имеют вид:

$$\begin{aligned}
f_{11}^1(\theta) &= \mu_2^2 \mu_1^{\frac{(-1)^n}{2}} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1^2 \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{\frac{n}{2}-1} \\
f_{22}^1(\theta) &= \mu_1^2 \mu_2^{\frac{(-1)^n}{2}} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_2^2 \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{\frac{n}{2}-1} \\
f_{12}^1(\theta) &= -\mu_2 \mu_1^{\frac{(-1)^n}{2}} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{\frac{n}{2}-1} + \mu_1 \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{\frac{n}{2}-1} \\
f_{11}^2(\theta) &= \mu_2^2 \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1^2 \mu_2^{\frac{(-1)^n}{2}} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{\frac{n}{2}-1} \\
f_{22}^2(\theta) &= \mu_1^2 \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_2^2 \mu_1^{\frac{(-1)^n}{2}} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{\frac{n}{2}-1} \\
f_{12}^2(\theta) &= -\mu_2 \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{\frac{n}{2}-1} + \mu_1 \mu_2^{\frac{(-1)^n}{2}} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{\frac{n}{2}-1}
\end{aligned}$$

Переопределенная система уравнений может быть получена путем выбора группы узлов (N узлов) в окрестности вершины трещины и подстановки напряжений этих узлов в уравнения. Тогда переопределенная система уравнений может быть описана как:

$$\sigma = XA \quad (2)$$

где σ — вектор-строка, состоящая из напряжений выбранных узлов, X — матрица, состоящая из известных радиальных и угловых распределений компонент тензора напряжений, A — вектор-столбец, состоящий из искомых амплитудных множителей.

Процесс решения с помощью переопределенного метода следующий: Для нахождения обобщенного решения используется первое преобразование Гаусса, умножив обе части системы (2) слева на транспонированную матрицу X^T :

$$X^T X A = X^T \sigma$$

Матрица $X^T X$ результирующей системы является квадратной, симметричной, положительно определенной. Её решение представляет собой обобщенное решение исходной системы (2) и может быть выражено через обратную матрицу:

$$A = (X^T X)^{-1} X^T \sigma \quad (3)$$

Полученные с применением переопределенного метода амплитудные множители позволяют вывести калибровочную зависимость для определения Т-напряжений. Вследствие анизотропии исследуемого материала, в данную зависимость необходимо ввести поправку, учитывающую не только масштабный фактор, но и параметр, характеризующий саму анизотропию.

В рассматриваемой плоской задаче о бесконечной пластине с центральной трещиной длиной $2a$, геометрический фактор γ становится функцией

относительной длины трещины a/l , где l - размер пластины, подверженной действию равномерного растягивающего напряжения σ , коэффициент интенсивности напряжений для нормального отрыва определяется выражением $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$. Данное соотношение является частным случаем более общей тарировочной формулы $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\gamma$, где безразмерный геометрический фактор γ для бесконечной пластины равен единице.

Современные численные методы, в частности МКЭ [5], обеспечивают высокоточное определение коэффициентов интенсивности напряжений. Применение переопределенного метода для асимптотического разложения полей напряжений в сочетании с конечно-элементным моделированием различных геометрических конфигураций (характеризуемых безразмерным параметром a/l) позволяет получить обобщенные тарировочные формулы. Для материала $CsSnI_3$ тарировочная формула выглядит следующим образом:

$$F(\gamma) = 0,998 + 0,002\gamma + 1,756\gamma^2 - 0,101\gamma^3 + 0,129\gamma^4 \quad (1)$$

Полученные таким образом формула устанавливает связь между приложенной нагрузкой, геометрическими параметрами трещины и соответствующими значениями КИН, учитывая при этом особенности напряженного состояния в окрестности вершины дефекта.

Литература

1. *Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M.R.*, Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms // *Applied Mathematical Modelling*, **91** (2021), 837–862.
2. *Степанова Л.В., Фомченкова М.А.*, О точности усеченных разложений полей у вершины трещины в анизотропных материалах // *Проблемы прочности и пластичности*, **86**:4 (2024), 403–420.
3. *Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghouli S.*, The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of crack tip asymptotic fields in anisotropic planes // *Engineering Fracture Mechanics*, **231** (2020).
4. *Степанова Л.В., Фомченкова М.А.*, Процедура переопределенного метода нахождения коэффициентов разложения полей у вершины трещины, основанная на конечно-элементном решении для компонент тензора напряжения // *Вестник Самарского университета. Естественная серия*, **30**:2 (2024), 54–66.
5. *Hou C., Wang Z., Jin X., Ji X., Fan X.*, Determination of SIFs and T-stress using an over-deterministic method based on stress fields: Static and dynamic // *Engineering Fracture Mechanics*, **242** (2021).

КЛАССЫ ТЕСТОВЫХ И РАДИАЛЬНО-УГЛОВЫХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЯМИ К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ КОРНЕЙ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Б.Н. Хабибуллин, Ф.Б. Хабибуллин

khabib-bulat@mail.ru, khabibullinfb@mail.ru

УДК 517.53, 517.574

Сначала приводятся две теоремы о распределении корней голоморфных функций f на области комплексной плоскости с поточечным ограничением на рост вида $|f| \leq \exp M$. Ключевую роль при этом играют тестовые финитные субгармонические функции. Затем формулируется теорема о распределении корней голоморфных функций на круге или целых функций с таким же ограничением на рост. В этих случаях применяются тестовые радиально-угловые субгармонические функции на концентрических кольцах, представленные в виде произведения функции от радиуса на функцию от аргумента в полярном представлении комплексной переменной.

Ключевые слова: голоморфная функция, целая функция, распределение корней, субгармоническая функция, субфункция, рост функции

Распределением точек на области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ называем любую функцию $Z: D \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$. *Распределением корней голоморфной на D функции f* называем функцию Z_f , равную в каждой точке из D кратности корня функции f в этой точке. Голоморфная на D функция f обращается в нуль на распределении точек Z , если $Z_f \geq Z$ на D . И эвристические, и теоретические наблюдения — чем быстрее растёт вблизи границы ∂D области D модуль $|f|$ функции f , тем быстрее растёт вблизи ∂D распределение корней Z_f функции f , и наоборот. То же самое можно сказать и про распределения точек, на которых функция f обращается в нуль. Наше дальнейшее обсуждение будет касаться ограничений на f вида

$$|f(z)| \leq \exp M(z) \quad \text{при всех } z \in D, \quad (1)$$

где M — функция на D со значениями в вещественной прямой $\mathbb{R}$ или в её расширении $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Как по внутренней логике теории голоморфных функций, так и в связи с разнообразными приложениями этой теории значительный интерес представляет следующая

Задача 1. *Каковы распределения корней $Z = Z_f$ при ограничении (1)?*

Этой задаче значительное внимание уделено во многих работах. Ограничимся здесь ссылками лишь на монографии или обзоры [1]–[10].

В идеале решение этой задачи должно даваться исключительно в терминах Z и M с учётом геометрии области D . При этом имеет смысл рассматривать лишь *локально конечные* распределения точек Z , т.е. с условием

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (код научной темы FMRS-2025-0010).

Хабибуллин Булат Нурмиевич, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН (Уфа, Россия); Bulat Khabibullin (Institute of Mathematics with Computing Centre of the Ufa Federal Research Centre of the RAS, Ufa, Russia)

Хабибуллин Фархат Булатович, к.ф.-м.н., доцент, Уфимский государственный нефтяной технический университет (Уфа, Россия); Farkhat Khabibullin (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

$\sum_{z \in K} Z(z) < +\infty$ для любого компакта $K \subset D$, поскольку в противном случае по одной из теорем Вейерштрасса только нулевая функция обращается в нуль на Z . Поэтому далее Z — локально конечное распределение точек с $Z(o) = 0$ для некоторой точки $o \in D$.

Для формулировки критерия по сформулированной задаче 1 введем для точки $o \in D$ класс $\mathcal{V}_o$ *тестовых функций* $v: D \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ со значением $v(o) = +\infty$, финитных на D , бесконечно дифференцируемых на $D \setminus \{o\}$, с положительным оператором Лапласа $\Delta v \geq 0$ на $D \setminus \{o\}$ и с единичной нормировкой $\lim_{o \neq z \rightarrow o} \frac{v(z)}{-\ln|z-o|} = 1$ в точке $o \in D$.

Теорема 1. ([10]–[15]). Пусть область $D \subseteq \mathbb{C}$ совпадает с $\mathbb{C}$ или дополнение $\mathbb{C} \setminus D$ состоит из конечного числа связных множеств, не все из которых одноточечные, а функция $M: D \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ локально интегрируема по плоской мере Лебега $\mathfrak{m}_2$ и с точками Лебега всюду на D :

$$M(z) = \lim_{0 < r \rightarrow 0} M_z^{\bullet r} \quad \text{в каждой точке } z \in D, \quad \text{где } M_z^{\bullet r} := \int_{|w-z| \leq r} M \, d\mathfrak{m}_2$$

— интегральное среднее функции M по кругу с центром z достаточно малого радиуса $r > 0$. Для существования голоморфной на D функции f с ограничением (1) и распределением корней $Z_f = Z$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\sup_v \left(\sum_{z \in D} v(z) Z(z) - \frac{1}{2\pi} \int_{D \setminus \{0\}} M \Delta v \, d\mathfrak{m}_2 \right) < +\infty. \quad (2)$$

где $\sup$ берётся по всем тестовым функциям $v \in \mathcal{V}_o$.

Близкой к задаче 1, но всё-таки отличной от неё является

Задача 2. Каковы распределения точек Z на области $D \subset \mathbb{C}$, для которых найдётся голоморфная на D ненулевая функция f , удовлетворяющая ограничению (1) и одновременно обращающаяся в нуль на Z ?

Функция $M: D \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ субгармоническая на области $D \subseteq \mathbb{C}$, если она полунепрерывна сверху и $M(z) \leq M_z^{\bullet r}$ в каждой точке $z \in D$ при всех $r > 0$, меньших расстояния от z до ∂D . По задаче 2 имеются близкие друг к другу необходимые и достаточные условия для любых областей $D \subseteq \mathbb{C}$, но для субгармонической функции M на D в части достаточности.

Теорема 2. ([10], [11], [14]–[18]) Если существует голоморфная на D функция $f \neq 0$ с ограничением (1), обращающейся в нуль на Z с $Z(o) = 0$ для некоторой точки $o \in D$, а функция M такая же как в теореме 1, то выполняется соотношение (2), но с $\sup$ уже по всем тестовым положительным функциям $v \in \mathcal{V}_o^+ := \{v \in \mathcal{V}_o \mid v(z) \geq 0 \, \forall z \in D\}$.

Обратно, если (2) выполнено с $\sup$ по всем $v \in \mathcal{V}_o^+$ для некоторой субгармонической на D функции $M \neq -\infty$, то для любой непрерывной строго положительной функции $r \leq 1$ на D , строго меньшей в каждой точке расстояния от неё до границы ∂D , и любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся голоморфная на D функция $f \neq 0$, обращающаяся в нуль на Z , для которой

$$\ln |f(z)| \leq M_z^{\bullet r(z)} + \ln \frac{1}{r(z)} + (1 + \varepsilon) \ln(1 + |z|) \quad \text{при всех } z \in D,$$

где при непустом дополнении $\mathbb{C} \setminus (D \cup \partial D)$ замыкания области D или при односвязности области D в правой части этого неравенства можно отбросить последнее слагаемое $(1 + \varepsilon) \ln(1 + |z|)$, а если $D = \mathbb{C}$ и при этом $\liminf_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln r(z)}{\ln |z|} > -\infty$, то в правой части можно оставить только $M_z^{\bullet r(z)}$.

Вместо класса $\mathcal{V}_o$ в теореме 1 или $\mathcal{V}_o^+$ в теореме 2 можно использовать и многие другие классы тестовых функций с отказом от дифференцируемости; из функций Грина с полюсом в точке $o \in D$ специальных классов подобластей, относительно компактных в D , например, объединений конечных наборов кругов или многоугольников и пр.; логарифмов модулей замкнутых голоморфных дисков и др. При этом для необходимых условий важно выбирать классы тестовых функций как можно более широкими, а для достаточных условий — как можно более узкими.

Остановимся подробнее на необходимых условиях из нашей работы [19] 2025 г. для случая, когда область D — это круг $D(R_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_0\}$ строго положительного радиуса $R_0 \leq +\infty$, $D(+\infty) = \mathbb{C}$. В такой ситуации на основе полярной формы записи комплексного числа $z = te^{i\theta}$ с модулем $t := |z| < R_0$ и аргументом $\theta \in \arg z \subseteq \mathbb{R}$ напрашивается применение радиально-угловых тестовых функций, конструируемых как произведение пары функций F и s соответственно от t и от θ .

Заряд на $D(R_0)$ — это разность положительных радоновских мер на $D(R_0)$. Для заряда Δ на $D(R_0)$ и непрерывной 2π -периодической функции s на $\mathbb{R}$ определим его *читающую радиально-угловую функцию с весом s* как интегралы $\Delta^{\mathbf{ra}(s)}(t) := \iint_{|z| \leq t} s(\arg z) d\Delta(z)$. При $s = 1$ получаем обычную *читающую радиальную функцию* $\Delta^{\mathbf{r}}(t) := \Delta^{\mathbf{ra}(1)}(t) = \Delta(D(t))$.

Локально конечному распределению точек Z на $D(R_0)$ сопоставляется *читающая радиально-угловая функция с весом s* в виде суммы

$$Z^{\mathbf{ra}(s)}(t) := \sum_{\substack{t \in [0, R_0) \\ |z| \leq t}} s(\arg z) Z(z).$$

Функцию $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ называем *ln-выпуклой*, если для любых двух пар чисел $a, b \in I$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ из выполнения неравенств $F(x) \leq c_1 \ln x + c_2$ при $x := a$ и $x := b$ следует выполнение такого же неравенства при любых x из отрезка $[a, b]$.

При $0 \leq p \in \mathbb{R}^+$ функция $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *p -тригонометрически выпуклой* на $\mathbb{R}$, если для любых двух пар чисел $a \leq b < a + \pi/p$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ из выполнения неравенств $s(x) \leq c_1 \cos px + c_2 \sin px$ при $x := a$ и $x := b$ следует выполнение такого же неравенства при любых $x \in [a, b]$.

При $0 < p \in \mathbb{R}^+$ функцию $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}^+$, следуя [19], называем *p -степенно выпуклой* на I , если для любых двух пар чисел $a, b \in I$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ из выполнения неравенств $F(x) \leq c_1 x^p + c_2 x^{-p}$ при $x := a$ и $x := b$ следует выполнение такого же неравенства при любых $x \in [a, b]$. По определению функцию F на промежутке $I \subset \mathbb{R}$ называем *0-степенно выпуклой*, если и только если она *ln-выпукла*.

Субгармонической на области $D \subseteq \mathbb{C}$ функции $M \neq -\infty$ сопоставляется *распределение масс Рисса* $\Delta_M := \frac{1}{2\pi} \Delta M \geq 0$ в смысле обобщённых функций. Разности $M = M_1 - M_2$ субгармонических функций $M_1 \neq -\infty$ и $M_2 \neq -\infty$ соответствует *распределение зарядов Рисса* $\Delta_M := \Delta_{M_1} - \Delta_{M_2}$.

В [19; теорема 2.1] следующий результат был установлен только для плоскости $\mathbb{C}$, т.е. $R_0 = +\infty$, и лишь *субгармонических функций* M на $\mathbb{C}$. Здесь мы переносим его на функции на произвольном круге $D(R_0)$ и на разности M *субгармонических функций, не равных $-\infty$* . При этом через $M^{\circ r} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(re^{i\theta}) d\theta$ обозначаем интегральное среднее функции M по окружности $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$. В обозначениях $M^+ := \sup\{M, 0\}$ и $\Delta_M^- \geq 0$ для нижней вариации распределения зарядов Рисса Δ_M определяем *характеристику Неванлинны* $T_M(r)_{0 < r < R} := (M^+)^{\circ r} + \int_0^r \frac{(\Delta_M^-)^{\mathbf{r}}(t)}{t} dt$ этой разности M субгармонических функций, не равных $-\infty$ (см. [20], [21]).

Теорема 3. ([22; теорема 1]) Пусть Z — распределение точек на $D(R_0)$, M — разность субгармонических на $D(R_0)$ функций, не равных $-\infty$, и существует обращающаяся в нуль на Z голоморфная на $D(R_0)$ функция f , для которой $f(0) = 1$ и $\ln|f(z)| \leq M(z)$ для почти всех точек $z \in D(R_0)$ по плоской мере Лебега m_2 . Выберем произвольно:

- (I) число $p \in \mathbb{R}^+$ и p -тригонометрически выпуклую положительную 2π -периодическую функцию $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ на $\mathbb{R}$ с $\|s\|_{\mathbb{R}} := \sup\{s(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$,
- (II) пару чисел $0 < r < R < R_0$ и p -степенно выпуклую положительную убывающую функцию F на $(r, R) \subset \mathbb{R}^+$ с $F(R) := \lim_{R > t \rightarrow R} F(t) \in \mathbb{R}^+$ и

$$F(r) := \lim_{r < t \rightarrow r} F(t) < +\infty, \quad F'_{\text{np}}(r) := \lim_{r < t \rightarrow r} \frac{F(t) - F(r)}{t - r} > -\infty. \quad (3)$$

Тогда имеет место неравенство

$$\int_r^R \left(\Delta_M^{\mathbf{ra}(s)}(t) - Z^{\mathbf{ra}(s)}(t) \right) dF(t) \leq \|s\|_{\mathbb{R}} \left(pF(r) - rF'_{\text{np}}(r) \right) T_M(r), \quad (4)$$

где три сомножителя справа положительны и не зависят от $R < R_0$.

В этом же неравенстве (4) при выборе в (II) положительной убывающей p -степенно выпуклой функции F на всём $(0, R)$ без требований (3), но с конечными верхними пределами $\lim_0^p F := \limsup_{0 < t \rightarrow 0} t^p F(t)$ при $p > 0$ или

$\lim_0^0 F := \limsup_{0 < t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{\ln(1/t)}$ при $p = 0$ сомножитель $(pF(r) - rF'_{\text{np}}(r))$ в правой части неравенства можно заменить на $2pr^{-p}\lim_0^p F$ при $p > 0$ или на $\lim_0^p F$ при $p = 0$ для любых $r \in (0, R)$.

Доказательство теоремы 3 существенно опирается на то, что при выборе функций s и F как в (I)–(II) функции-произведения

$$z = te^{i\theta} \xrightarrow[r < t < R, \theta \in \mathbb{R}]{} s(\theta)F(t) \in \mathbb{R}^+ \quad (5)$$

субгармонические в концентрическом кольце $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$, которые мы классифицируем как тестовые *радиально-угловые субгармонические функции* на кольце. Возможно дальнейшее развитие этого класса и теоремы 3 путём перехода к *кусочно радиально-угловым субгармоническим функциям* на кольцах, разбитых на кольцевые секторы системой лучей с началом в нуле. Для таких функций в каждом таком секторе выбирается своя пара функций s и F , порождающих субгармоническую в нём функцию вида (5),

а затем эти функции «склеиваются» на разбивающих лучах так, что становятся субгармоническими на всём кольце. Это требует довольно деликатных технических конструкций и пока детально нигде не рассматривалась.

Литература

1. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. — Гостехиздат, М., 1956.
2. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . — Мир, М., 1984.
3. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. — Мир, М., 1984.
4. Шведенко С.В., Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техн. Сер. матем. анализ, ВИНТИ, М., **23** (1985), 3–124.
5. Ронкин Л.И., Целые функции // Комплексный анализ — многие переменные — 3, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, ВИНТИ, М., **9** (1986), 5–36.
6. Лелон П., Груман Л. Целые функции многих переменных. — Мир, М., 1989.
7. Гольдберг А.А., Левин Б.Я., Островский И.В., Целые и мероморфные функции // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, ВИНТИ, М., **85** (1991), 5–185.
8. Rubel L.A. Entire and meromorphic functions. — Springer-Verlag, NY, 1996.
9. Koosis P. Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin. — Univ. Montréal, Les Publications CRM, Montréal, QC, 1996.
10. Хабибуллин Б.Н. Полнота систем экспонент и множества единственности, 4-е изд. — РИЦ БашГУ, Уфа, 2012. ISBN 978-5-7477-2992-6.
11. Хабибуллин Б.Н., Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты // Матем. сборник, **198**:2 (2007), 121–160.
12. Меньшикова Э.Б., Хабибуллин Б.Н., К распределению нулевых множеств голоморфных функций. II // Функц. анализ и его прилож., **53**:1 (2019), 84–87
13. Меньшикова Э.Б., Хабибуллин Б.Н., Критерий последовательности корней голоморфной функции с ограничениями на ее рост // Изв. вузов. Математика, **5** (2020), 55–61.
14. Хабибуллин Б.Н. Огибающие в теории функций. — РИЦ БашГУ, Уфа, монография, 2021. ISBN 978-5-7477-5396-9.
15. Khabibullin B.N., Menshikova E.B., Preorders on Subharmonic Functions and Measures with Applications to the Distribution of Zeros of Holomorphic Functions // Lobachevskii Journal of Mathematics, **43**:3 (2022), 587–611.
16. Хабибуллин Б.Н., Последовательности неединственности для весовых пространств голоморфных функций // Изв. вузов. Математика, **4** (2015), 75–84.
17. Хабибуллин Б.Н., Хабибуллин Ф.Б., О множествах неединственности для пространств голоморфных функций // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1. Математика. Физика, **4**(35) (2016), 108–115.
18. Хабибуллин Б.Н., Хабибуллин Ф.Б., К распределению нулевых множеств голоморфных функций. III. Теоремы обращения // Функц. анализ и его прилож., **53**:2 (2019), 42–58.
19. Хабибуллин Б.Н., Распределение корней целых функций с субгармонической мажорантой // Матем. сборник, **216**:7 (2025), 109–152.
20. Хабибуллин Б.Н., Характеристика Неванлинны и интегральные неравенства с максимальной радиальной характеристикой для мероморфных функций и разностей субгармонических // Алгебра и анализ, **34**:2 (2022), 152–184.
21. Хабибуллин Б.Н., Интегралы от разности субгармонических функций по мерам и характеристика Неванлинны // Матем. сборник, **213**:5 (2022), 126–166.
22. Khabibullin B.N., Khabibullin F.B., Distribution of zeros of holomorphic functions bounded from above by the difference of subharmonic functions // Lobachevskii Journal of Mathematics, (2026) (в печати).

ЦИФРОВЫЕ ДВОЙНИКИ КАК ИНСТРУМЕНТ АДАПТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ

Е.В. Харитонов

kharitonov.work9@gmail.com

УДК 004.78

В работе рассматривается технология цифровых двойников обучающихся как технологическая основа адаптивного обучения в системе высшего образования. Интеграция методов искусственного интеллекта и анализа больших данных формирует предпосылки для перехода к образовательным системам нового поколения.

Ключевые слова: адаптивное обучение, цифровая трансформация, интеллектуальные образовательные системы

Цифровая трансформация проникает во все сферы общественной жизни, включая образование, которое в университетской среде переживает этап интенсивной модернизации. Высшие учебные заведения функционируют в условиях возросшего запроса на персонализированный характер усвоения знаний, что обусловлено усложнением профессиональных требований и ускорением технологического развития. [1] Академическое сообщество стремится выстроить такую модель подготовки специалистов, которая обеспечит гибкое реагирование на изменчивую структуру современного рынка труда и сформирует у обучающихся способность к устойчивому профессиональному росту. [2,3] В таких условиях инновационные решения становятся основой для создания более адаптивной образовательной среды, способной учитывать индивидуальные траектории и высокие стандарты будущей экономики. [4,5]

Одним из наиболее перспективных технических подходов к реализации адаптивного обучения является концепция цифрового двойника, первоначально сформировавшаяся в промышленной сфере в рамках Индустрии 4.0 и ориентированная на создание виртуальной репрезентации физического объекта или системы на основе непрерывно обновляемых данных, поступающих от реального прототипа. [6] Адаптация данной концепции к образовательной среде обеспечит формирование цифровых моделей обучающихся и создаст предпосылки для глубокой трансформации образовательных практик.

Важным методологическим следствием внедрения цифровых двойников становится переосмысление самой природы оценки учебных достижений. Традиционные формы контроля, ориентированные на итоговые результаты и периодические проверочные мероприятия, в условиях использования цифрового двойника дополняются непрерывной аналитикой процесса обучения. Оценка перестаёт быть дискретным актом и трансформируется в динамическую систему мониторинга, фиксирующую не только факт усвоения материала, но и характер когнитивных затруднений, скорость продвижения, устойчивость сформированных навыков.

Харитонов Егор Витальевич, студент, Самарский государственный экономический университет (Самара, Россия); Kharitonov Egor Vitalievich (student, Samara State University of Economics, Samara, Russia), работа под научным руководством Олина Романа Александровича (старший преподаватель, Самарский государственный экономический университет)

Накопление агрегированных и обезличенных данных о траекториях обучения больших групп студентов позволяет выявлять устойчивые паттерны успешного освоения дисциплин. [7] На основе таких данных становится возможным проводить эмпирическую валидацию учебных планов, корректировать последовательность подачи материала, оптимизировать нагрузку и уточнять содержание курсов. [8] Таким образом, цифровой двойник выступает не только инструментом индивидуализации обучения, но и источником данных для системного повышения качества образовательных программ на институциональном уровне. [9]

Практическая реализация персонализированных цифровых моделей обучающихся неизбежно затрагивает вопросы надежности, безопасности и управляемости. Формирование индивидуальных профилей требует строгого разграничения прав доступа и применения криптографических механизмов защиты при хранении и передаче информации. Следует минимизировать объем обрабатываемых сведений за счет отбора исключительно значимых показателей и удаления избыточных данных. Дополнительное внимание должно уделяться предотвращению искажений, поскольку даже незначительные ошибки на этапе сбора способны привести к накоплению системных неточностей в аналитических выводах. [10]

Отдельного внимания заслуживает потенциал цифровых двойников в междисциплинарном обучении. Современные профессиональные задачи требуют интеграции знаний из различных областей, однако традиционная структура высшего образования остается фрагментированной по дисциплинарному признаку. [11] Цифровой двойник обучающегося позволяет отслеживать формирование междисциплинарных связей, выявлять синергетические эффекты и рекомендовать необходимые образовательные модули на стыке направлений подготовки, что способствует формированию целостной картины знаний и развитию системного мышления.

Управление образовательным процессом на основе персонализированных цифровых моделей обучающихся расширяет возможности прогнозирования академической успеваемости и обоснованной оценки эффективности внедряемых новаций. [12,13] Развитие данного подхода обусловлено достижениями в области искусственного интеллекта, обработки больших данных и облачных вычислений. По мере снижения порога входа цифровые двойники могут стать стандартным элементом образовательной инфраструктуры наравне с применяемыми электронными системами управления обучением. [14]

В совокупности проведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что рассматриваемые технологические решения следует интерпретировать как устойчивое направление развития современных образовательных систем. При условии ответственного отношения к вопросам управления данными, этических ограничений и институциональных преобразований такие решения могут сформировать основу образовательной среды ближайшего будущего, в которой цифровые технологии последовательно и системно способствуют раскрытию человеческого потенциала и поддержке непрерывного профессионального развития.

Литература

1. *Шиверов П.К.* Средства повышения качества подготовки специалистов по информационным технологиям / Новиков С.Я., Федина М.Е., Шиверов П.К. //

Образование в современном мире: инновационные стратегии. — Самара: Самарский университет, 2016. — 127–131. — EDN VSIPYD.

2. Федина М.Е. Как привлечь учащегося к занятиям наукой / Новиков С.Я., Федина М.Е. // Образование в современном мире: стратегические инициативы. — Самара: Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 2017. — 495–500. — EDN ZSDPHB.

3. Новиков С.Я. Образовательные траектории одаренного студента / Новиков С.Я., Федина М.Е. // Образование в современном мире: достижения, вызовы, перспективы. — Самара: Ваш Взгляд, 2020. — 384–391. — EDN YDCLBT.

4. Шарипов Р.Р., Применение автономных интеллектуальных агентов в процессах цифровой трансформации / Олин Р.А., Федина М.Е., Шарипов Р.Р. // Экономика и предпринимательство, 10(183) (2025), 1254–1259.

5. Олин Р.А., Экономика данных как движущая сила цифровой трансформации / Р.А. Олин // Наука XXI века: актуальные направления развития, 2-2 (2025), 169–174. — EDN EHNQHU.

6. Kayikcioglu T. Akcayol M., Information Security Issues in Blockchain-Based Systems: A Structural Analysis // Information, 16:10 (2025), art. no. 846. — DOI: 10.3390/info16100846. URL: <https://www.mdpi.com/2078-2489/16/10/846> (дата обращения: 13.10.2025).

7. Олин Р.А. Методы обеспечения безопасности данных в распределённых системах искусственного интеллекта / Р.А. Олин, В.В. Бондаренко // Актуальные проблемы радиоэлектроники и телекоммуникаций. — Самара: ООО «АРТЕЛЪ», 2025. — 198–200. — EDN ITHYTA.

8. Новиков С.Я. Можно ли научить пониманию / С.Я. Новиков // Образование в современном мире: профессиональная подготовка кадрового потенциала с учетом передовых технологий. — Самара: «Ваш Взгляд», 2018. — 375–378. — EDN YYDEMХ.

9. Осипов М.Н., Гибридная рабочая сила в цифровой экономике / Р.А. Олин, М.Н. Осипов, А.В. Тимофеев // Экономика и предпринимательство, 10(183) (2025), 386–390. — EDN HYBZYU.

10. Liu Q., Khalil M., Understanding privacy and data protection issues in learning analytics using a systematic review / Q. Liu, M. Khalil // British Journal of Educational Technology, 54:4 (2023), 715–747. — DOI: 10.1111/bjet.13388.

11. Бондаренко В.В. Анализ эффективности реализации алгоритмов хеширования в оптических вычислителях / Р. А. Олин, В. В. Бондаренко, М. А. Волохович // Актуальные проблемы радиоэлектроники и телекоммуникаций. — Самара: ООО «АРТЕЛЪ», 2025. — 201–203. — EDN OBJNSK.

12. Jones K.M.L., Learning analytics and higher education: a proposed model for establishing informed consent mechanisms to promote student privacy and autonomy [Электронный ресурс] // International Journal of Educational Technology in Higher Education, 16:1 (2019), art. no. 24. — DOI: 10.1186/s41239-019-0155-0. Режим доступа: <https://link.springer.com/article/10.1186/s41239-019-0155-0> (Дата обращения: 09.10.2025).

13. Cormack A.N., A data protection framework for learning analytics [Электронный ресурс] // Journal of Learning Analytics, 3:1 (2016), 91–106. — DOI: 10.18608/jla.2016.31.6.

14. Новиков С.Я. О развитии студенческого самоуправления на механико-математическом факультете Самарского государственного университета / Новиков С.Я., Федина М.Е. // Образование в современном мире: роль вузов в социально-экономическом развитии региона. — Самара: Самарский государственный университет, 2014. — 12–14. — EDN TABMFR.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОТРЕБЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМОБИЛЕМ НА ОСНОВЕ РЕАЛИСТИЧНОГО ЦИКЛА ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ ЗАРЯДА АККУМУЛЯТОРА

М.Б. Чернов, А.В. Голубков

chernovmb2002@gmail.com, kr8589@gmail.com

УДК 004.94

В работе предложен алгоритм генерации реалистичного токового профиля для лабораторных испытаний одиночного литий-ионного аккумулятора, основанный на упрощенной, но физически обоснованной динамической модели движения электромобиля. В отличие от стандартных циклов, алгоритм связывает кинематику движения с электрическими характеристиками системы. Учитывая сопротивление качения, аэродинамику, инерцию, КПД двигателя и рекуперацию, вычисляются мгновенные мощность и ток. На основе WLTC-подобного скоростного профиля, заданного узловыми точками и сглаженного интерполяцией, формируется длительный разрядный цикл, адаптированный к одиночному элементу через масштабирование по мощности. Полученный токовый профиль сохраняет ключевые особенности реальной эксплуатации — резкие разгоны, рекуперативные торможения и динамические переходные режимы, что позволяет использовать его для сравнительного анализа оценки уровня заряда (SoC), в том числе на основе калмановской фильтрации.

Ключевые слова: WLTC, профиль тока, цикл движения, степень заряда аккумулятора

В современном мире происходит непрерывное развитие энергетической и транспортной отраслей. В связи с этим наблюдается стремительный рост популярности электромобилей. Одним из основных элементов любого электромобиля является тяговая аккумуляторная батарея, от точности оценки состояния которой напрямую зависят такие параметры, как запас хода, безопасность эксплуатации и срок службы. Именно поэтому задача точного определения уровня заряда аккумулятора (State of Charge, SoC) занимает важную роль, поскольку ошибки в его оценке могут приводить как к преждевременному отключению транспортного средства, так и к риску переразряда или перезаряда элементов.

Для стандартизированной оценки характеристик транспортных средств, включая расход энергии и выбросы, на протяжении десятилетий применяются так называемые циклы движения (driving cycles), такие как NEDC, FTP-75 и другие. Однако многие из них считаются устаревшими. На смену им пришли современные стандарты оценки, в частности процедура WLTP (Worldwide harmonized Light vehicles Test Procedure), которая использует более реалистичный цикл движения — WLTC (Worldwide harmonized Light-duty Test Cycle). В отличие от устаревшего NEDC, WLTC характеризуется

Чернов Максим Борисович, магистрант, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова (Ульяновск, Россия); (Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia)

Голубков Алексей Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова (Ульяновск, Россия); Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia)

частыми и резкими изменениями скорости, что значительно лучше отражает реальные условия эксплуатации электромобилей, включая городские режимы с многочисленными стартами и остановками. Цикл NEDC характеризуется плавными ускорениями и упрощенным профилем движения, в то время как WLTC, несмотря на большую реалистичность, ориентирован на оценку совокупного энергопотребления, а не на динамику токовых нагрузок на отдельные элементы аккумуляторной батареи. Стоит так же отметить, что WLTC включает четыре скоростных режима и предназначен для автомобилей массой до 3,5 тонн [1]. Более того, такие циклы не учитывают специфику электрической тяги, включая рекуперацию энергии, высокие пиковые токи и нелинейную зависимость напряжения от SoC и температуры.

Перечисленные особенности создают серьезную проблему при проведении лабораторных исследований аккумуляторов: использование стандартных транспортных циклов для испытаний одиночных элементов или модулей часто приводит к неточным или нерепрезентативным результатам, особенно в контексте алгоритмов оценки степени заряда и разработки систем управления батареями (BMS).

Основной целью данного исследования является разработка алгоритма генерации специализированного тестового цикла, адаптированного к поведению отдельного аккумуляторного элемента. Такой цикл должен отражать реалистичные профили тока, характерные для эксплуатации аккумулятора в составе электромобиля, и обеспечивать воспроизводимые, информативные и релевантные условия для точной оценки SoC и других ключевых параметров аккумулятора.

Для адекватного моделирования динамики электромобиля необходимо учитывать основные силы, действующие на транспортное средство в процессе движения [2]. Согласно второму закону Ньютона, сумма всех сил, приложенных к автомобилю, определяет его ускорение.

В общем виде уравнение движения записывается как:

$$F_{\text{тяги}} - F_{\text{сопр}} = m \cdot a, \quad (1)$$

Сила сопротивления $F_{\text{сопр}}$ складывается из следующих основных компонентов:

$$F_{\text{сопр}} = F_{\text{кач}} + F_{\text{аэро}}, \quad (2)$$

где: $F_{\text{кач}}$ — сила сопротивления качению, $F_{\text{аэро}}$ — сила аэродинамического сопротивления.

Полное уравнение движения электромобиля с учетом разложения сил можно представить следующим образом:

$$F_{\text{тяги}} = m \cdot \frac{dv}{dt} + C_{\text{тр}} \cdot m \cdot g + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_{\text{ас}} \cdot A_{\text{лоб}} \cdot v^2, \quad (3)$$

где $C_{\text{тр}}$ — коэффициент сопротивления качению, m — масса объекта, g — ускорение свободного падения, $C_{\text{ас}}$ — коэффициент аэродинамического сопротивления, $A_{\text{лоб}}$ — лобовая площадь, ρ — плотность воздуха, v — скорость движения относительно воздуха.

Данное уравнение можно связать с электрической системой. Для преобразования скоростного профиля в электрическую нагрузку используется физическая модель движения электромобиля. Механическая мощность,

требуемая для движения, определяется как:

$$N(t) = (F_{\text{кач}} + F_{\text{аеро}} + F_{\text{уск}}) \cdot v(t), \quad (4)$$

При положительном ускорении ($a(t) \geq 0$) механическая мощность потребляется от батареи с учетом КПД электродвигателя $\eta_{\text{дв}}$. При отрицательном ускорении ($a(t) < 0$) часть энергии рекупируется с эффективностью $\eta_{\text{рек}}$. Электрическая мощность, отбираемая от тяговой батареи, задается следующим образом:

$$P(t) = \begin{cases} \frac{N(t)}{\eta_{\text{дв}}}, & a(t) \geq 0, \\ -N(t) \cdot \eta_{\text{рек}}, & a(t) < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, уравнение (3) служит основой для связи динамики движения с электрическими характеристиками аккумулятора и позволяет моделировать профиль тока, необходимый для оценки состояния заряда (SoC) и разработки специализированных тестовых циклов.

В настоящей работе используется упрощенный профиль скорости, имитирующий ключевые фазы WLTP: городскую, пригородную и трассовую. Профиль задается в виде последовательности узловых точек «время-скорость» и интерполируется квадратичной функцией для обеспечения гладкости и физической реализуемости ускорений. Полученный профиль искусственно удлиняется путем повторения, формируя длительный разрядный цикл продолжительностью около 1.5 ч, что соответствует типичным требованиям лабораторных испытаний аккумуляторов.

На основе скорости, заданной в км/ч, вычисляется ускорение, что позволяет учитывать инерционные нагрузки при разгонах и торможениях — ключевые особенности городского цикла движения.

Входные параметры алгоритма для генерации профиля тока выглядят следующим образом:

- масса автомобиля: $m = 1600$ кг;
- коэффициент сопротивления качению: $C_{\text{тр}} = 0,01$;
- коэффициент аэродинамического сопротивления: $C_{\text{ас}} = 0,28$;
- лобовая площадь: $A_{\text{лоб}} = 2,4$ м²;
- плотность воздуха: $\rho = 1,225$ кг/м³;
- эффективность рекуперации: $\eta_{\text{рек}} = 0,65$;
- эффективность электродвигателя: $\eta_{\text{дв}} = 0,92$;
- номинальное напряжение аккумулятора: $V_{\text{ном}} = 360$ В;
- емкость аккумулятора: $C_{\text{ак}} = 60$ А·ч.

Выходом алгоритма являются профили ускорения, мощности и тока нагрузки, представленные на рисунке.

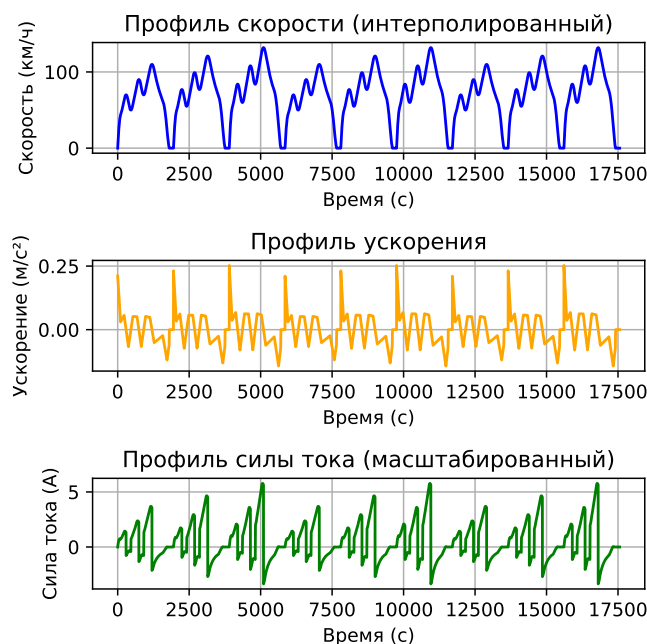


Рис. 1: Графики выходных характеристик

Стоит отметить, что при переходе от полноразмерной тяговой батареи к лабораторным испытаниям одиночного аккумуляторного элемента возникает задача корректного масштабирования электрической нагрузки. Существуют следующие подходы: масштабирование по току, масштабирование по энергии и масштабирование по мощности.

Масштабирование по мощности учитывает как ток, так и напряжение, которые зависят от состояния элемента. При известном количестве последовательных и параллельных элементов батареи мощность делится поровну между всеми элементами, и по ней вычисляется нужный ток для испытаний.

Если же количество элементов неизвестно, используют приближение через емкости, но такой подход допустим только при одинаковой номинальной емкости аккумулятора и постоянном напряжении.

Для масштабирования по энергии один и тот же ток нагрузки, что и в реальной батарее, пропускается через элемент, емкость которого пересчитывается с учетом параллельных ветвей.

В работе предложен и реализован комплексный подход к генерации репрезентативного токового цикла для лабораторного моделирования работы одиночного литий-ионного аккумулятора в условиях, приближенных к реальной эксплуатации электромобиля. На основе упрощенного WLTC-подобного профиля движения с учетом рекуперации энергии и динамических нагрузок получен физически обоснованный токовый сигнал, адаптированный к параметрам отдельного элемента путем корректного масштабирования по мощности.

Для симуляции разрядных процессов использована дискретная стохастическая модель в пространстве состояний, основанная на эквивалентной схеме замещения второго порядка, а так же нелинейной функцией $OCV(SOC)$, полученной на основе экспериментальных данных [3]. Представленный цикл обеспечивает описание реалистичной динамики тока нагрузки, а полученные данные могут использоваться для разработки и тестирования алгоритмов оценки состояния заряда аккумулятора в реальном времени. В частности, они могут быть использованы для сравнительного анализа методов оценки SoC на основе методов калмановской фильтрации.

Таким образом, предложенный метод позволяет преодолеть разрыв между стандартными транспортными циклами и требованиями к подходам лабораторных испытаний аккумуляторов, обеспечивая высокую релевантность результатов моделирования к практическим задачам разработки систем управления батареями (BMS) и прогнозирования.

Литература

1. Щуров Н.И., Внуков С.А., Моделирование эффективной силовой энергоустановки электромобиля с учетом нагрузочных циклов движения // Доклады АН ВШ РФ, 2 (59) (2023).
2. Тарраф М., Гаевский В.В., Диб М., Моделирование, управление и регулирование энергопотребления гибридного автомобиля // Омский научный вестник. Серия «Авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение», 1 (2025).
3. Чернов М.Б., Голубков А.В. Идентификация параметров модели литий-ионного аккумулятора // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 04–06 декабря 2023 г. — Воронеж: «Научно-исследовательские публикации», 2024. — 758–763.

РАВНОМЕРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ

Е.Е. Читоркин, Н.П. Бондаренко
chitorkin.ee@ssau.ru, bondarenkonp@sgu.ru

УДК 517.984

В данной работе рассматривается свойство равномерной устойчивости обратной задачи Штурма–Лиувилля на графе-звезде. Доказаны теоремы о равномерной устойчивости восстановления вещественных потенциалов из пространства $L_2(0, \pi)$ для задачи по спектральным данным и для задачи по набору спектров.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение Штурма–Лиувилля, равномерная устойчивость, граф-звезда

Рассмотрим следующую краевую задачу Штурма–Лиувилля $L = L(\mathbf{q})$ на графе-звезде из m ребер одинаковой длины π :

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in (0, \pi), \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

$$y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

$$y_j(\pi) = y_1(\pi), \quad j = \overline{2, m}, \quad \sum_{j=1}^m y_j'(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{q} = [q_j(x_j)]_{j=1}^m$ — вектор вещественных потенциалов из пространства $L_2(0, \pi)$, λ — спектральный параметр.

Определим характеристическую функцию $\Delta(\lambda)$ задачи L , нули которой совпадают с собственными значениями задачи. Она имеет следующий вид:

$$\Delta(\lambda) = \sum_{k=1}^m S_k'(\pi, \lambda) \prod_{j=1, j \neq k}^m S_j(\pi, \lambda),$$

где $S_j(x, \lambda)$ — это решение j -го уравнения задачи, удовлетворяющее начальным условиям $S_j(0, \lambda) = 0$, $S_j'(0, \lambda) = 1$.

Спектр $\{\lambda_{nk}\}_{n \geq 1, k = \overline{1, m}}$ задачи L является счетным множеством вещественных собственных значений. Для простоты будем считать, что $\int_0^\pi q_j(x_j) dx_j = 0$ при всех $k = \overline{1, m}$. Тогда собственные значения могут быть занумерованы в соответствии с их асимптотикой (см. [1]):

$$\rho_{nk} = \sqrt{\lambda_{nk}} = \begin{cases} n + \frac{\kappa_{nk}}{n\pi}, & k = \overline{1, m-1}, \\ n - \frac{1}{2} + \frac{\kappa_{nk}}{n\pi}, & k = m, \end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 24-71-10003).

Читоркин Егор Евгеньевич, аспирант, Самарский университет (Самара, Россия), лаборант-исследователь, Саратовский государственный университет (Саратов, Россия); Egor Chitorkin (Samara University, Samara, Russia; Saratov State University, Saratov, Russia)

Бондаренко Наталья Павловна, д.ф.-м.н., профессор, Самарский университет (Самара, Россия); Саратовский государственный университет (Саратов, Россия); Natalia Bondarenko (Samara National Research University, Samara, Russia; Saratov State University, Saratov, Russia)

где $n \geq 1$ и $\{\kappa_{nk}\} \in l_2$.

Следуя работе [2], для $s \in \{1, 2, \dots, m\}$ определим решение Вейля $\Phi_s(x, \lambda)$ как вектор функций $[\Phi_{js}(x_j, \lambda)]_{j=1}^m$, удовлетворяющих соответствующим уравнениям (1), условиям склейки (2) и граничным условиям

$$\Phi_{ss}(0, \lambda) = 1, \quad \Phi_{js}(0, \lambda) = 0, \quad j = \overline{1, m} \setminus s,$$

и функции Вейля задачи L :

$$M_s(\lambda) = \Phi'_{ss}(0, \lambda).$$

Функции Вейля являются мероморфными по λ и имеют простые полюсы, совпадающие с собственными значениями $\{\lambda_{nk}\}$. Определим весовые числа $\alpha_{nkj} \geq 0$ как следующие вычеты:

$$\alpha_{nkj} = - \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{nk}} M_j(\lambda).$$

В случае кратного собственного значения $\lambda_{n_1 k_1} = \lambda_{n_2 k_2} = \dots = \lambda_{n_r k_r}$ имеем $\alpha_{n_1 k_1 j} = \alpha_{n_2 k_2 j} = \dots = \alpha_{n_r k_r j}$. Разобьем данное весовое число некоторым образом на r неотрицательных слагаемых: $\alpha_{n_1 k_1 j} = \sum_{i=1}^r \beta_{n_i k_i j}$. Справедливы асимптотические формулы (см. [3]):

$$\sum_{k=1}^{m-1} \beta_{nkj} = \frac{2n^2}{m\pi} \left(m - 1 + \frac{\varkappa_{nj}^0}{n} \right),$$

$$\beta_{nmj} = \frac{\left(n - \frac{1}{2} \right)^2}{m\pi} \left(2 + \frac{\varkappa_{nj}^1}{n} \right),$$

где $n \geq 1$, $j = \overline{1, m}$ и $\{\varkappa_{nj}^i\} \in l_2$, $i = 0, 1$.

Рассмотрим две задачи $L^{(1)} = L(\mathbf{q}^{(1)})$ и $L^{(2)} = L(\mathbf{q}^{(2)})$. Условимся, что если обозначение $\gamma^{(1)}$ относится к задаче $L^{(1)}$, то $\gamma^{(2)}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к задаче $L^{(2)}$.

Рассмотрим множество $\mathbf{P}_Q := \{\mathbf{q} : \sum_{i=1}^m \|q_j(x)\|_{L_2(0, \pi)} \leq Q\}$, $Q > 0$.

Пусть $\delta_{nk} = |\rho_{nk}^{(1)} - \rho_{nk}^{(2)}| + n^{-2} \sum_{j=1}^m |\beta_{nkj}^{(1)} - \beta_{nkj}^{(2)}|$ и $C(Q)$ обозначает различные константы, зависящие только от Q .

Теорема 1. Пусть $Q > 0$ и $\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)} \in \mathbf{P}_Q$. Тогда

$$\sum_{j=1}^m \|q_j^{(1)}(x) - q_j^{(2)}(x)\|_{L_2(0, \pi)} \leq C(Q) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (n\delta_{nk})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Перейдем к обратной задаче по набору спектров. Пусть Λ — спектр исходной задачи L , а Λ_j — спектр задачи L_j , полученной из задачи L заменой краевого условия на j -том ребре на $y_j'(0) = 0$. Спектры этих задач также являются счетными множествами вещественных собственных значений, которые могут быть занумерованы в соответствии с их асимптотикой (см. [1]):

$$\theta_{nkj} = \begin{cases} n + \frac{\xi_{nkj}}{n\pi}, & k = \overline{1, m-2}, \\ n - 1 + \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{\xi_{nkj}}{n\pi}, & k = m-1, \\ n - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{\xi_{nkj}}{n\pi}, & k = m, \end{cases}$$

где $n \geq 1$, $j = \overline{1, m-1}$ и $\{\xi_{nkj}\} \in l_2$.

Теорема 2. Пусть $Q > 0$ и $\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)} \in \mathbf{P}_Q$. Тогда

$$\sum_{j=1}^m \|q_j^{(1)}(x) - q_j^{(2)}(x)\|_{L_2(0,\pi)} \leq C(Q)\delta,$$

$$\text{где } \delta = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^m |n(\rho_{nk}^{(1)} - \rho_{nk}^{(2)})|^2 + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{m-1} |n(\theta_{nkj}^{(1)} - \theta_{nkj}^{(2)})|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство теорем 1 и 2 основано на конструктивном методе решения обратной спектральной задачи на произвольном графе-дереве из [2] и развивает идеи работы [4], в которой получена равномерная устойчивость обратной задачи Штурма-Лиувилля на графе с циклом.

Литература

1. *Cheng Y.H.*, Reconstruction of the Sturm-Liouville operator on a p-star graph with nodal data // Rocky Mount. J. Math., **42**:5 (2012), 1431–1446.
2. *Юрко В.А.*, О восстановлении операторов Штурма-Лиувилля на графах // Матем. заметки, **79**:4 (2006), 619–630.
3. *Kuznetsova M.A.*, Asymptotic formulae for weight numbers of the Sturm-Liouville boundary problem on a star-shaped graph // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика, **18**:1 (2018), 40–48.
4. *Bondarenko N.P.*, Stability of the inverse Sturm-Liouville problem on a graph with a cycle // J. Inverse Ill-Posed Probl. (2025), published onl. — URL: <https://doi.org/10.1515/jiip-2025-0059>.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ВЫРАВНИВАНИЯ ДЛЯ СИНХРОНИЗАЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ ПОПЕРЕЧНОГО УРОВНЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПУТИ

Д.А. Шаталов

shatalov.mitia2017@yandex.ru

УДК 519.216.3

В статье рассматривается применение метода динамического выравнивания рядов (DTW) для синхронизации и анализа измерений поперечного уровня, одного из важнейших параметров геометрии железнодорожного пути. Измерения одного и того же участка пути в различные периоды времени часто содержат в данных растяжения и сжатия. Алгоритм DTW позволяет определить оптимальные соответствия между рядами. Применение данного алгоритма показало высокую эффективность для синхронизации данных, полученных с путеизмерительных вагонов.

Ключевые слова: динамическое выравнивание рядов, геометрия железнодорожного пути, синхронизация рядов.

Геометрия железнодорожного пути является ключевым параметром, обеспечивающим надёжность и безопасность движения грузовых и пассажирских поездов. Она состоит из следующих параметров: ширина колеи, поперечный уровень, стрела прогиба и другие [1]. Геометрия железнодорожного пути подлежит ежемесячному мониторингу, позволяющему фиксировать отклонения параметров от эталонных, что позволяет своевременно выявлять опасные участки и проводить ремонтные работы. Одним из важнейших показателей в геометрии железнодорожного пути является поперечный уровень, он характеризует разность высот между головками рельсов. Исходя из аналитических отчётов Ространснадзора немалую долю происшествий на железной дороге составляют нарушения содержания пути [2–3]. Так, за последние 5 лет средний процент от общего кол-ва нарушений составил 24.6% на путях общего пользования и 56.08% на путях необщего пользования соответственно.

Современные системы диагностики и мониторинга состояния геометрии железнодорожного пути, применяемые в настоящее время, дважды в месяц контролируют состояние геометрии железнодорожного пути и выявляют отступления параметров от эталонных значений на ранних стадиях, благодаря чему накапливается большой объём информации, который в дальнейшем можно использовать для анализа и прогнозирования возможных отклонений и дефектов в геометрии железнодорожного пути [4]. Однако, при попытке сопоставления данных, полученных с путеизмерительных вагонов за разные периоды времени, возникает проблема несоответствия рядов данных относительно друг друга, это происходит по различным причинам, например, точки старта путеизмерительного вагона смещены, разная скорость движения путеизмерительного вагона на одном и том же участке пути, в данных имеются ошибки и погрешности оборудования. Такое смещение негативно влияет на анализ и точность результатов прогнозирования.

Шаталов Дмитрий Александрович, аспирант кафедры Цифровые технологии, Приволжский государственный университет путей сообщения, (Самара, Россия); Shatalov Dmitry (Volga State Transport University, Samara, Russia)

Для точного сопоставления данных необходим метод, способный корректно определить соответствие измерений. На рисунке 1 отображены данные, полученные с путеизмерительного вагона за январь и февраль. На графике видно сильное смещение данных относительно друг друга.

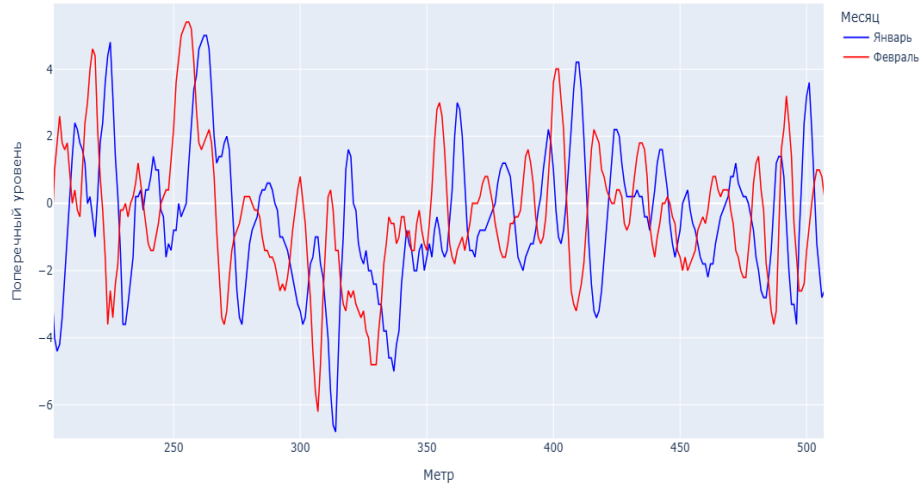


Рис. 1: Данные до синхронизации

Целью данной работы является синхронизация измерений поперечного уровня железнодорожного пути по данным мониторинга методом DTW.

Метод динамического выравнивания (DTW) представляет собой алгоритм поиска оптимального соответствия между двумя рядами измерений, которые могут отличаться длиной или масштабом оси [5]. В отличие от методов, основанных на линейном сдвиге сигналов, DTW позволяет учитывать, как локальные растяжения, так и сжатия, обеспечивая более точное сопоставление последовательностей. В нашем случае имеются два набора данных с путеизмерительных вагонов за два месяца (Январь и Февраль), $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ — набор данных поперечного уровня за январь, а $X^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_m^{(2)})$ — набор данных поперечного уровня за февраль. Для устранения чрезмерных растяжений необходимо ввести ограничивающее окно, которое задаёт максимальное допустимое значение отклонения:

$$|i - j| \leq w,$$

где w — ширина окна, задающее допустимое смещение между сравниваемыми точками. Также, для устранения неестественных растяжений вводится штраф γ за горизонтальные и вертикальные шаги при вычислении матрицы накопленных расстояний. Тогда формула DTW с учётом штрафа будет иметь следующий вид:

$$D(i, j) = |x_i^{(1)} - x_j^{(2)}| + \min \begin{cases} D(i-1, j) + \gamma, \\ D(i, j-1) + \gamma, \\ D(i-1, j-1), \end{cases}$$

где $D(i, j)$ — минимальная суммарная стоимость выравнивания первых i точек ряда $X^{(1)}$ и первых j точек ряда $X^{(2)}$.

Данный алгоритм был реализован на языке программирования Python с применением библиотеки `dtadistance` [6]. На рисунке 2 представлен график после синхронизации методом DTW, оптимальные значения w и γ определялись экспериментальным путем.

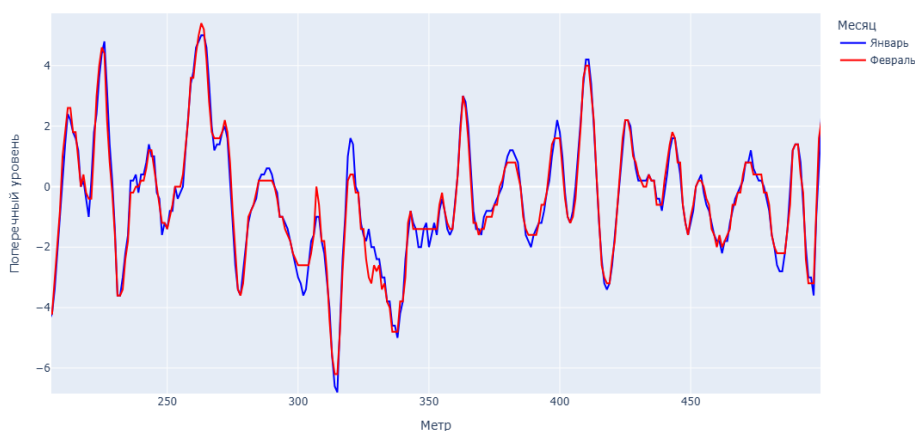


Рис. 2: Данные после синхронизации методов DTW

Реализация метода DTW была апробирована на реальных данных мониторинга геометрии железнодорожного пути, полученные в различные периоды времени. До применения метода DTW наблюдалось отсутствие синхронизации между рядами данных, смещение и искажения в форме сигналов, что затрудняло анализ и дальнейшее прогнозирование. Применение метода DTW позволило устранить данные несоответствия. На рисунке 2 наглядно видно, как формы рядов стали более согласованными, совмещены локальные экстремумы.

Метод DTW продемонстрировал высокую эффективность для синхронизации измерений геометрии железнодорожного пути, что делает его удобным инструментом для предобработки измерений поперечного уровня и других параметров геометрии железнодорожного пути.

Литература

1. Косенко С.А., Причины отказов элементов железнодорожного пути на полигоне Западно-Сибирской железной дороги / Косенко С.А., Акимов С.С. // Вестник Сибирского государственного университета путей сообщения, 3(42) (2017), 26–34. — EDN ZSMGXZ.
2. Информационно-аналитические и справочные материалы Госжелдорнадзора по безопасности движения поездов на железнодорожном транспорте Российской Федерации за январь–июнь 2025 года // Ространснадзор. — URL: <https://rostransnadzor.gov.ru/documents/5654> (дата обращения: 21.10.2025).
3. Информационно – аналитические и справочные материалы Госжелдорнадзора по безопасности движения поездов на железнодорожном транспорте Российской Федерации за январь–декабрь 2024 года // Ространснадзор. — URL: <https://rostransnadzor.gov.ru/documents/5436> (дата обращения: 21.10.2025).
4. Шаталов Д.А., Комбинированная модель прогнозирования дисперсии ширины железнодорожной колеи на основе робастной регрессии и ARMA / Шаталов Д.А., Иванов Д.В. // Вестник СамГУПС, № 2(68) (2025), 163–168. — EDN JCRQCP.

5. *Романенко А.А.*, Выравнивание временных рядов: прогнозирование с использованием DTW / Романенко А.А. // Машинное обучение и анализ данных, **1:1** (2011), 77–85. — EDN OXWKSР.
6. Dynamic Time Warping (DTW) // Welcome to DTAIDistance's documentation! — DTAIDistance 2.3.9 documentation. — URL: <https://dtaidistance.readthedocs.io/en/stable/usage/dtw.html> dtw-distance-measure-between-two-time-series (дата обращения: 22.10.2025).

АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ РЕКОНСТРУКЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ПОЛУЧАЕМЫХ МЕТОДОМ ЦИФРОВОЙ ФОТОУПРУГОСТИ

С.С. Шестерина, Л.В. Степанова

sofia.djera@gmail.com, stepanova.lv@ssau.ru

УДК 004.032.26, 620.171.5

В работе рассмотрены методы реконструкции изображений, получаемых методом цифровой фотоупругости, с использованием сверточных нейронных сетей (CNN). Проанализированы архитектуры нейронных сетей для обработки изображений с низким разрешением и высоким уровнем шума. Исследованы возможности предсказания напряженно-деформированного состояния материалов при различных нагрузках на основе ограниченного набора экспериментальных данных. Предложена собственная концепция CNN для решения этих задач.

Ключевые слова: сверточные нейронные сети, глубокое обучение, реконструкция изображений, экспериментальная механика, метод цифровой фотоупругости

Традиционные подходы к обработке изображений, полученных методом цифровой фотоупругости, сталкиваются с проблемами при количественной оценке интерференционных картин изохроматических полос, например, в условиях наличия шума или низкого разрешения. Другой проблемой является прогнозирование промежуточных или будущих распределений напряжений на основе последовательностей изохроматических изображений, полученных в ходе проведенных экспериментов.

Анализ последних научных разработок показывает хорошую применимость глубокого обучения в области цифровой фотоупругости, в частности, методов, основанных на сверточных нейронных сетях. Современные исследования основаны на подходе анализа отдельных статических изохроматических изображений и временном подходе, использующем последовательности кадров для извлечения динамической информации о поле напряжений.

В анализе статических изображений используются такие архитектуры, как автоэнкодеры и U-Net архитектуры. Так, нейронная сеть StressNet представляет собой автоэнкодер и демонстрирует высокую эффективность при обработке синтетических данных, достигая показателя структурного подобию (SSIM) 0.95. Более совершенная модель StressUnet основана на U-Net архитектуре со слоями ResNet и модулем ограничения, который гарантирует, что карта напряжений согласуется с физическими законами, что позволяет ей достигать SSIM 0.97 [1]. Однако обе модели показывают снижение производительности при работе с экспериментальными данными, что указывает на необходимость повышения обобщающей способности алгоритмов.

Временной подход к анализу напряжений основан на отслеживании цветных траекторий отдельных пикселей в процессе эксперимента. Этот метод анализирует динамику изменения цвета в каждой точке изображения, что позволяет оценить поля напряжений в нагруженных телах. Наиболее

Шестерина Софья Сергеевна, студент, Самарский университет (Самара, Россия); Shesterina Sofia (Samara University, Samara, Russia)

Степанова Лариса Валентиновна, д.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Stepanova Larisa (Samara University, Samara, Russia)

эффективными для данной задачи оказались искусственные нейронные сети (ANN) и метод опорных векторов (SVM). Они демонстрируют точность классификации 0.96 и 0.94, соответственно, а для точного прогнозирования непрерывных значений напряжений оптимально применять регрессию с методом k-ближайших соседей [2].

Для решения задач прогностического мониторинга были разработаны многоступенчатые автоэнкодеры, способные предсказывать будущие распределения напряжений. В отличие от рекуррентных нейронных сетей (RNN), многоступенчатые автоэнкодеры параллельно обрабатывают последовательность изображений через независимые энкодеры с последующим объединением признаков, что обеспечивает точность предсказания до 0.998 [3].

На основе анализа сформулирована концепция усовершенствованной архитектуры сверточной нейронной сети (CNN). Ее особенности включают:

1). Гибридное обучение на данных метода конечных элементов и экспериментальных данных, что позволяет повысить обобщающую способность. Эксперименты показывают, что добавление экспериментальных изображений к синтетическим значительно улучшает SSIM на реальных данных.

2). Использование U-Net архитектуры, которая благодаря пропускающим слоям обеспечивает более точное восстановление деталей изохроматических картин.

3). Усовершенствованная функция потерь, использующая L_1 -норму, L_2 -норму и метрику структурного подобия SSIM:

$$\mathcal{L} = \alpha \mathcal{L}^{MS-SSIM}(I_r, I_g) + \beta \mathcal{L}^{L_1}(I_r, I_g) + (1 - \alpha - \beta) \mathcal{L}^{L_2}(I_r, I_g),$$

где I_r и I_g - восстановленная и эталонная карта напряжений, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.25$ — весовые коэффициенты. Такая комбинация учитывает абсолютную ошибку попиксельно и структурное сходство, которое лучше воспринимается человеческим глазом.

Оценка эффективности будет проводиться по комплексным метрикам, включая SSIM, MSE и PSNR, с последующим сравнительным анализом с существующими решениями.

Проведенное исследование подтверждает перспективность применения глубокого обучения для реконструкции изображений, полученных методом цифровой фотоупругости. Основными направлениями дальнейших исследований являются расширение базы экспериментальных данных для обучения моделей, улучшение обобщающей способности моделей и оптимизация функций потерь.

Литература

1. *Bríñez-de León L.C., López-Osorio H., Rico-García M., Fandiño-Toro H.*, Deep learning as a powerful tool in digital photoelasticity: Developments, challenges, and implementation // Optics and Lasers in Engineering, **180** (2024), art. no. 108274. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2024.108274>.
2. *Bríñez-de León J., Montoya-Suárez L., Fandiño-Toro H.*, Pattern recognition-based strategy applied to continuous intensity evolution for quantifying the stress field in digital photoelasticity // Optik - International Journal for Light and Electron Optics, **334** (2025), art. no. 172390. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2025.172390>.
3. *Hyunsoo L., Heungjo A., Dong-Wook L.* Time-staged photoelastic image prediction using multi-stage convolutional autoencoders // Engineering

Applications of Artificial Intelligence, **16** (2022), art. no. 105265. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2022.105265>.

4. *Konurin A., Neverov S., Neverov A., Orlov D., Zharov I., Konurina M.* Application of artificial neural networks for stress state analysis based on the photoelastic method // Geohazard Mechanics, **1** (2023), 128–139. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.ghm.2023.03.001>.

Анисимов, Г.С., Степанова Л.В. Экспериментальное определение полей у вершины трещины: метод голографической интерферометрии и метод корреляции цифровых изображений // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика., **3** (2024), 39–56. — URL: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2024.3.03>.

5. *Степанова Л.В., Анисимов, Г.С., Семенов Д.А.* Применение метода голографической интерферометрии для реконструкции ряда М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, **29:1** (2024), 15–46. — URL: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-15-46>.

О СВОЙСТВАХ НОСИТЕЛЯ НОРМАЛЬНОЙ КОПУЛЫ ГРАББСА

Л.К. Ширяева

Shiryeva_LK@mail.ru, Shiryeva.LK@ssau.ru

УДК 519.243

Рассмотрены односторонние статистики Граббса, т.е. экстремальные (по абсолютной величине) студентизированные отклонения наблюдений от среднего, найденные по нормальной собственно-случайной выборке объема n . Из совместного распределения этих статистик методом инверсии строится нормальная копула Граббса. Найденны области внутри единичного квадрата, не принадлежащие носителю копулы. Показано, что в этих областях нормальная копула Граббса совпадает с минимальной копулой. Следовательно, нормальная копула Граббса имеет неполный носитель. Определены границы носителя копулы в случае $n = 4$.

Ключевые слова: нормальный закон распределения, односторонние статистики Граббса, копула, носитель копулы, минимальная копула

Пусть независимые случайные наблюдения $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ извлечены из генеральной совокупности, имеющей нормальное $N(a, \sigma^2)$ распределение, параметры a и σ^2 которого предполагаются неизвестными. Рассмотрим односторонние статистики Граббса [1], т.е. экстремальные (по абсолютной величине) студентизированные отклонения наблюдений от выборочного среднего, найденные по выборке из n наблюдений

$$T_{n,(1)} = - \min_{1 \leq i \leq n} (X_i - \bar{X})/S$$
$$T_n^{(1)} = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i - \bar{X})/S,$$

где $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ и $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

Известно [1], что $P(T_n^{(1)} < t) = P(T_{n,(1)} < t)$.

Обозначим $F_n^{(1)}(t) = P(T_n^{(1)} < t)$. Рекурсивные соотношения для вычисления $F_n^{(1)}(t)$ в случае $n \geq 3$ имеют вид [2]:

$$F_n^{(1)}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, n \geq 2; \\ n \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^t F_{n-1}^{(1)}(g_n(x)) f_{T_n}(x) dx, & \frac{1}{\sqrt{n}} < t \leq \frac{n-1}{\sqrt{n}}, n \geq 3; \\ 1, & t > \frac{n-1}{\sqrt{n}}, n \geq 2; \end{cases}$$

где $g_n(u) = \frac{\frac{n-1}{n-2}u}{\sqrt{\frac{n-1}{n-2} \left(1 - \frac{n}{(n-1)^2} u^2\right)}}$, $|u| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}$;

$f_{T_n}(x) = \frac{1}{n-1} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \left(1 - \frac{n}{(n-1)^2} x^2\right)^{\frac{n-4}{2}}$, $|x| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}$;

Ширяева Людмила Константиновна, к.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Ludmila Shiryeva (Samara University, Samara, Russia)

$\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера;

$$F_2^{(1)}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ 1, & t > \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Обозначим $\Lambda_n(t_1, t_2) = P(T_{n,(1)} < t_1, T_n^{(1)} < t_2)$. В работе [3] доказана следующая

Теорема. Пусть независимые случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ имеют нормальное $N(a, \sigma^2)$ распределение и $n > 2$. Тогда

$$\Lambda_n(t_1, t_2) = \begin{cases} F_n^{(1)}(t_2), & t_1 \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}; \quad F_n^{(1)}(t_1), & t_2 \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}; \\ n \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{t_2} \Lambda_{n-1}(\rho_n(t_1, -x), g_n(x)) f_{T_n}(x) dx, & (t_1, t_2) \in \Delta_n; \\ 0, & (t_1, t_2) \notin \Delta_n, \quad t_1 < \frac{n-1}{\sqrt{n}}, \quad t_2 < \frac{n-1}{\sqrt{n}}, \end{cases}$$

где $\rho_n(u, v) = \left(u + \frac{v}{n-1}\right) / \sqrt{\frac{n-1}{n-2} \left(1 - \frac{n}{(n-1)^2} v^2\right)}$, $|v| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}$;

$\Delta_n = \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{n-1}{\sqrt{n}}\right]^2$, если $n > 2$;

$$\Lambda_2(t_1, t_2) = \begin{cases} 0, & t_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ или } t_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ 1, & t_1 > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } t_2 > \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Нормальную копулу Граббса получим инверсией из двумерного распределения $\Lambda_n(t_1, t_2)$, используя следствие из теоремы Склара [4].

Обозначим через $\phi_n(\cdot)$ – функцию, обратную (в обобщенном смысле) функции частного распределения $F_n^{(1)}$, так что

$$F_n^{(1)}(\phi_n(\xi)) = \xi, \quad \forall \xi \in [0, 1];$$

$$\phi_n(F_n^{(1)}(x)) = x, \quad \forall x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{n-1}{\sqrt{n}}\right].$$

Тогда для $\forall(u, v)$ из единичного квадрата $I^2 = [0, 1]^2$ в случае $n \geq 3$ существует единственная копула-функция $C_{Gr}(u, v; n) : I^2 \rightarrow [0, 1]$, такая что

$$C_{Gr}(u, v; n) = \Lambda_n(\phi_n(u), \phi_n(v)).$$

Таким образом, нормальная копула-функция C_{Gr} зависит только от одного параметра – натурального n и $n \geq 3$.

В случае $n = 3$ копула C_{Gr} совпадает с минимальной копулой $W(u, v) = \max(0; u + v - 1)$ [5], т.е. выполняется равенство

$$C_{Gr}(u, v; 3) = W(u, v), \quad \forall(u, v) \in I^2.$$

Следовательно, для $n = 3$ носитель копулы C_{Gr} не является полным, так как он не совпадает с единичным квадратом I^2 .

Пусть $n > 3$ и область $\Xi_n = [0 \leq u \leq 1, \delta_n(u) \leq v \leq 1]$, где $\delta_n(u) = F_n^{(1)}(\theta_n(\phi_n(u)))$; $\theta_n(x) = \frac{x}{n-1} + \sqrt{n-2} \sqrt{1 - \frac{n}{(n-1)^2} x^2}$.

В работе [5] доказано, что $\forall (u, v) \in \Xi_n$ нормальная копула Граббса совпадает с минимальной копулой $W(u, v)$, так что

$$C^{Gr}(u, v; n) = u + v - 1, \text{ если } (u, v) \in \Xi_n.$$

Справедливы следующие утверждения

Утверждение 1.

Для $n \geq 3$ не существует собственного надмножества области Ξ_n , в котором нормальная копула Граббса совпадает с линейной функцией $u + v - 1$.

Утверждение 2. Пусть $n > 3$ и $D_n = E_n \cup E_n^\perp$. Тогда область D_n является подмножеством нулевого множества нормальной копулы Граббса, т.е. для $\forall (u, v) \in D_n$ имеет место равенство

$$C^{Gr}(u, v; n) = 0,$$

где $E_n = [0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \sigma_n(u)]$;
 $E_n^\perp = [0 \leq v \leq 1, 0 \leq u \leq \sigma_n(v)]$;
 $\psi_n(x) = \frac{x}{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n-2}} \sqrt{1 - \frac{n}{(n-1)^2} x^2}$;
 $\sigma_n(u) = F_n^{(1)}(\psi_n(\phi_n(u)))$.

Пусть область S_n – носитель нормальной копулы Граббса. Обозначим $\Sigma_n = D_n \cup \Xi_n$. Из утверждений 1 и 2 следует, что в случае $n > 3$ существует подмножество Σ_n единичного квадрата, в котором нормальная копула Граббса совпадает с минимальной копулой $W(u, v)$, т.е.

$$C^{Gr}(u, v; n) = W(u, v) \equiv \max(0; u + v - 1), \text{ если } (u, v) \in \Sigma_n.$$

Поэтому для нормальной копулы Граббса при $n \geq 3$ носитель S_n не совпадает с единичным квадратом I^2 . Следовательно, нормальная копула Граббса имеет неполный носитель.

Вопрос о границах ее носителя требует дальнейшего изучения. Можно лишь утверждать (см. Утверждение 1), что в случае $n > 3$ верхняя граница носителя копулы совпадает с участком кривой $\delta_n(u)$, $0 \leq u \leq 1$.

Следующие утверждения описывают свойства нулевого множества нормальной копулы Граббса.

Утверждение 3. В случае $n = 4$ нулевым множеством нормальной копулы Граббса является область D_4 .

Утверждение 4. В случае $n > 4$ нулевое множество нормальной копулы Граббса является собственным надмножеством области D_n .

Из Утверждения 3 следует, что справедливы следующие равенства

$$C^{Gr}(u, v; 4) = 0, \text{ если } (u, v) \in D_4,$$

$$C^{Gr}(u, v; 4) > 0, \text{ если } (u, v) \in I^2 \setminus D_4.$$

Пусть множество S_n – носитель нормальной копулы Граббса. Следующие утверждения описывают свойства носителя S_n .

Утверждение 5. В случае $n = 4$ носителем нормальной копулы Граббса $C^{Gr}(u, v; 4)$ является область $S_4 = I^2 \setminus \Sigma_4$.

Утверждение 6. Пусть $n > 4$ и $K_n = I^2 \setminus \Sigma_n$. Тогда $S_n \subset K_n$.

Следующее утверждение описывает границы носителя нормальной копулы Граббса в случае $n = 4$.

Утверждение 7. Пусть Γ – граница носителя нормальной копулы Граббса $C^{Gr}(u, v; 4)$. Тогда

$$\Gamma = \Gamma_4 \cup \Gamma_4^\perp \cup L_4,$$

где $\Gamma_4 = \{(u, v) : a_4^* \leq u \leq 1, v = \sigma_4(u)\}$, $\Gamma_4^\perp = \{(u, v) : a_4^* \leq v \leq 1, u = \sigma_4(v)\}$, $L_4 = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, v = \delta_4(u)\}$, $a_4^* = F_4^{(1)}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, функция $\delta_n(\cdot)$ описана в Утверждении 1, а функции $\sigma_n(\cdot)$ и $\psi_n(\cdot)$ – в Утверждении 2.

Нетрудно убедиться, что носитель копулы Граббса $C^{Gr}(u, v; 4)$ – область, симметричная относительно прямой $v = u$. Заметим, что нормальная копула Граббса является симметричной [6], т.е.

$$C^{Gr}(u, v; n) = C^{Gr}(v, u; n), \quad \forall (u, v) \in I^2.$$

Следовательно, носитель S_n и в случае $n > 4$ будет областью, симметричной относительно прямой $v = u$. Границы, отделяющие носитель копулы Граббса $C^{Gr}(u, v; n)$ от ее нулевого множества, в случае $n > 4$ требуют дальнейшего исследования.

Литература

1. *Grubbs F.E.*, Procedures for Detecting Outlying Observations in Samples // *Technometrics*, **11**:1 (1969), 121.
2. *Zhang J., Yu K.*, The null distribution of the likelihood-ratio test for one or two outliers in a normal sample // *TEST: An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research* **15**:1 (2006), 141–150.
3. *Ширяева Л.К.*, О нулевом и альтернативном распределении статистики критерия наибольшего по абсолютной величине нормированного отклонения // *Изв. вузов. Матем.*, 10 (2014), 62–78.
4. *Nelsen R.B.* An introduction to copulas. — Springer, 2006.
5. *Ширяева Л. К.*, О трехпараметрической копула-функции Граббса // *Изв. вузов. Матем.*, 3 (2019), 54–71.
6. *Ширяева Л. К.*, О хвостовой зависимости для копула-функции Граббса // *Изв. вузов. Матем.*, 12 (2015), 66–83.

ГИБРИДНАЯ ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЕЗОННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

М.А. Шугурова

m.a.shugurova@gmail.com

УДК 004.94, 681.5.015

Сезонные временные ряды часто применяются на практике для моделирования и прогнозирования в таких значимых областях как сельское хозяйство, ЖКХ, проектирование, строительство, планировании бюджета и др. Целью работы является разработка, верификация и анализ эффективности гибридной линейной регрессионной модели, построенной путем комбинации трех дискретных моделей: физической модели в пространстве состояний, динамической гармонической регрессии (DHR) и сезонной модели ARIMA (SARIMA). Рассмотрен пример применения построенной модели для моделирования годового хода температуры воздуха на основе данных атмосферных реанализов.

Ключевые слова: временные ряды, дискретные линейные стохастические системы, линейная регрессия, гибридная модель, годовой ход температуры воздуха

Введение

Применение прогнозирования сезонных временных рядов охватывает широкий спектр областей, где наблюдаемые данные демонстрируют регулярные колебания с определённой периодичностью (например, ежедневные, еженедельные, ежемесячные или ежегодные циклы). Такие ряды характерны для многих природных, экономических и социальных процессов. Для прогнозирования сезонных временных рядов применяют различные математические модели, учитывающие как тренд, так и сезонную компоненту.

Подход к прогнозированию временных рядов на основе гибридных моделей представляет собой стратегию, при которой комбинируются преимущества нескольких методов для повышения точности, устойчивости и адаптивности прогнозов. Особенно актуален такой подход для сложных, нестационарных и многокомпонентных временных рядов, таких как среднемесячная температура воздуха, где присутствуют тренд, сезонность, случайные колебания и возможные структурные сдвиги.

Описание базовых моделей и предлагаемого подхода

Физическая модель в пространстве состояний (Physical Model).

В качестве основы для моделирования использована физическая модель годового хода температуры воздуха, представленная в [1]. Модель построена на основе дискретного гармонического осциллятора с внешним воздействием и формализована в виде линейной стохастической системы в простран-

Шугурова Марина Александровна, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова (Ульяновск, Россия); Marina Shugurova (Ulyanovsk State Pedagogical University. I. N. Ulyanov, Ulyanovsk, Russia)

стве состояний. Уравнения модели имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} c & \frac{s}{\omega_n} & 0 \\ -\omega_n s & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} w_k, \\ z_k = [1 \quad 0 \quad 1] x_k + v_k, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} A \sin \varphi \\ A \omega_n \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где $d \triangleq e^{-\lambda\tau}$, $a \triangleq 1 - d$, $b \triangleq \sigma\sqrt{1-d^2}$, $c \triangleq \cos \omega_n \tau$, τ — период дискретизации, λ и σ — параметры случайного процесса, ω_n и φ — частота и фаза осциллятора, x_k — вектор состояния, u_k — управляющее воздействие, соответствующее среднему значению температуры воздуха, z_k — измерения, w_k и v_k — независимые нормально распределенные случайные последовательности с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационными матрицами $Q = 1$ и $R > 0$ соответственно.

Динамическая гармоническая регрессия (DHR — Dynamic Harmonic Regression). DHR-модель является развитием идеи гармонического осциллятора. Сезонная компонента представляется в виде суммы нескольких гармоник (синусов и косинусов) с фиксированными частотами, но с амплитудами, изменяющимися во времени [2]. Модель представляет собой регрессию на основе рядов Фурье для учета сезонности в сочетании с моделью ошибок (часто ARIMA), что позволяет учитывать несколько сезонных периодов (например, годовой и полугодовой циклы) и адаптироваться к изменению амплитуды сезонности. Общий вид модели:

$$y_t = a_0 + \sum_{k=1}^K \left(a_k \cdot \cos \left(\frac{2\pi kt}{m} \right) + b_k \cdot \sin \left(\frac{2\pi kt}{m} \right) \right) + \eta_t,$$

где y_t — значение временного ряда в момент времени t , a_0 — константа, K — количество гармоник, используемых для аппроксимации сезонной компоненты, m — длина сезонного периода (например, 12 для месячных данных с годовой сезонностью, 24 для часовых данных с суточной сезонностью), a_k , b_k — коэффициенты (амплитуды) для k -ой гармоники.

Сезонная модель ARIMA (SARIMA — Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average). ARIMA — классический метод для моделирования временных рядов. Модель $ARIMA(p, d, q)$ включает следующие компоненты: авторегрессию $AR(p)$ — зависимость текущего значения от предыдущих, интегрирование $I(d)$ — приведение ряда к стационарному виду с помощью дифференцирования, скользящее среднее $MA(q)$ — зависимость текущего значения от прошлых ошибок прогноза. Преимущество ARIMA — в способности эффективно описывать краткосрочную зависимость и стохастический тренд, но она может хуже прогнозировать детерминированные сезонные паттерны по сравнению с гармоническими моделями [3].

Для моделирования рядов с сезонностью может быть использована SARIMA — сезонная модель ARIMA, которая дополнительно моделирует сезонные закономерности. Общая модель $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)[m]$ может быть записана как

$$\Phi_P(B^m)\phi_P(B)(1-B^m)^D(1-B)^d y_t = \Theta_Q(B^m)\theta_Q(B)\varepsilon_t,$$

где m — сезонный период, B — оператор сдвига ($By_t = y_{t-1}$), $\phi_p(B)$ — несезонный AR-полином, $\Phi_P(B^m)$ — сезонный AR-полином, $\theta_q(B)$ — несезонный MA-полином, $\Theta_Q(B^m)$ — сезонный MA-полином, $(1 - B)^d$ — несезонное дифференцирование, $(1 - B^m)^D$ — сезонное дифференцирование, ε_t — белый шум.

Предлагаемый подход (гибридная модель). Для построения гибридной линейной модели предлагается следующий алгоритм:

1. Обучение (подгонка) базовых моделей. На обучающем временном ряде независимо идентифицируются параметры базовых моделей (Physical, DHR и SARIMA).
2. Линейная комбинация базовых моделей. Строится взвешенная сумма базовых моделей:

$$Y_{\text{Hybrid}}(t) = w_1 \cdot Y_{\text{Physical}}(t) + w_2 \cdot Y_{\text{DHR}}(t) + w_3 \cdot Y_{\text{SARIMA}}(t).$$

3. Оптимизация весов. Веса w_1, w_2, w_3 оптимизируются методом линейной регрессии на обучающих данных.

Численный эксперимент

Эксперимент проводился на данных атмосферных реанализов среднемесячной температуры воздуха NCEP/NCAR [4] для точки с координатами (54.28°N, 48.75°E). Диапазон дат обучающей выборки — 2009–2020 гг., тестовой выборки — 2021–2024 гг. Данные обучающей выборки представлены на рисунке 1.

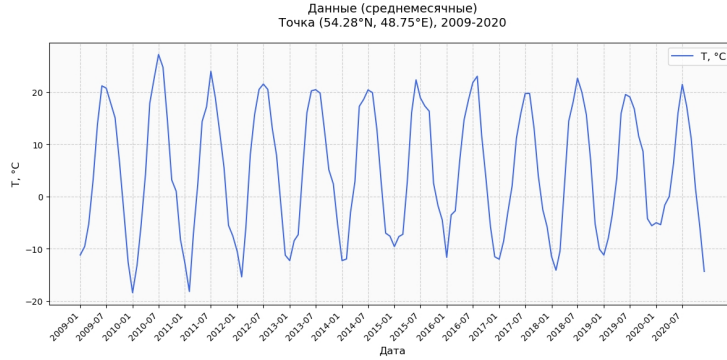


Рис. 1: Среднемесячная температура воздуха (обучающие данные)

Обработка данных реанализов, идентификация параметров и обучение моделей выполнялись с использованием оригинального программного обеспечения, написанного на языке Python.

Неизвестные параметры физической модели идентифицировались методом, предложенным в [1]. Полученные значения: $A = 16.8769$, $\phi = 4.1589$, $\lambda = 1.0039$, $\sigma = 2.7678$. Для модели DHR использовались следующие структурные параметры: $m = 12$ (период), и $K = 1$ (одна гармоника). Структура и параметры модели SARIMA определялись автоматически с помощью функции `auto_arima()` библиотеки `pmдарима`.

В результате подгонки гибридной линейной модели с дополнительным ограничением на положительность весов были получены следующие итоговые веса: $w_1 = 0.6926$, $w_2 = 0.2764$, $w_3 = 0.0258$.

Результаты обучения и прогнозирования представлены в таблице 1. В качестве метрик оценки качества моделей использовались среднеквадратичная и средняя абсолютная ошибки (RMSE и MAE), характеризующие точность предсказаний, а также коэффициент детерминации R^2 , оценивающий долю объяснённой дисперсии временного ряда на обучающей и тестовой выборках.

Таблица 1: Сравнение качества подгонки и прогнозирования моделей на обучающей и тестовой выборках

Метрика	Выборка	Physical	DHR	SARIMA	Hybrid
RMSE	Обучающая	2.7432	2.9341	3.7061	2.6995
	Тестовая	3.2035	3.2674	3.5362	3.1759
MAE	Обучающая	2.2053	2.3273	2.8131	2.1669
	Тестовая	2.4899	2.5935	2.7358	2.5146
R^2	Обучающая	0.9499	0.9426	0.9085	0.9514
	Тестовая	0.9295	0.9267	0.9141	0.9307

На рисунке 2 приведены результаты прогнозирования для тестовой выборки с использованием гибридной модели.

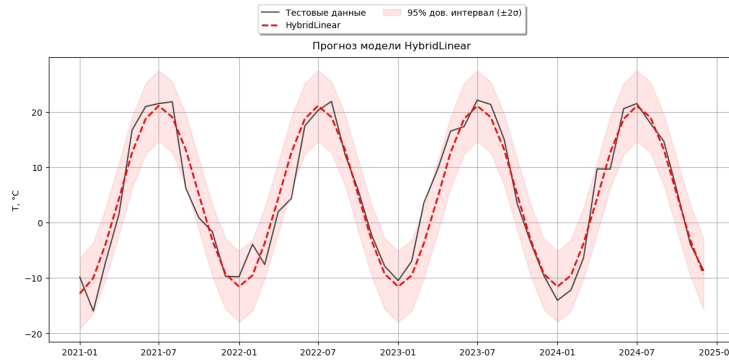


Рис. 2: Результаты прогнозирования гибридной модели

Анализ результатов экспериментов показывает, что все рассмотренные модели демонстрируют достаточно высокое качество описания и прогнозирования временного ряда температуры. На этапе подгонки наилучшие результаты показывают физическая модель и гибридный подход, которые обеспечивают минимальные значения RMSE и MAE при одновременно максимальных значениях R^2 , что указывает на их способность точно воспроизводить исторические данные. Результаты модели DHR по качеству близки к физической модели, тогда как SARIMA, несмотря на автоматический подбор порядков, уступает остальным по точности. На этапе прогноза гибридная модель демонстрирует наилучшие результаты, достигая наименьших ошибок (RMSE = 3.18, MAE = 2.51) и наибольшего коэффициента детерминации ($R^2 = 0.9307$) на тестовой выборке. Это свидетельствует о том, что комбинирование моделей с разными принципами построения позволяет эффективно компенсировать их индивидуальные недостатки и повышать надёжность прогноза.

Заключение

В работе представлены результаты исследования по разработке и апробации гибридной линейной регрессионной модели для прогнозирования сезонных временных рядов на примере годового хода температуры воздуха. В качестве базовых рассматриваются три модели: физическая модель в пространстве состояний на основе дискретного гармонического осциллятора, модель динамической гармонической регрессии (DHR) и сезонная модель ARIMA (SARIMA).

Проведено сравнительное тестирование моделей на данных атмосферных реанализов NCEP/NCAR за период 2009–2024 гг. Наилучшие индивидуальные результаты показала физическая модель. Предложенная гибридная модель, представляющая собой взвешенную комбинацию прогнозов базовых моделей с оптимизированными весами, продемонстрировала дополнительное улучшение точности прогноза.

Экспериментально подтверждена эффективность гибридного подхода для повышения точности прогнозирования сезонных климатических характеристик. Разработанная методология может быть применена для решения широкого круга задач прогнозирования сезонных временных рядов в различных областях.

Литература

1. Шугурова М. А., Цыганов А. В. Построение и идентификация параметров дискретной стохастической модели годового хода температуры воздуха // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2023): сборник трудов по материалам IX Международной конференции и молодежной школы (г. Самара, 17–23 апреля 2023 г.), т. 5. Науки о данных. — Самара: Издательство Самарского университета, 2023.
2. Young, P. C., Pedregal, D. J., Tych, W. Dynamic harmonic regression for modelling and forecasting seasonal time series // International Journal of Forecasting, **15** (1999), 378–394.
3. Box, G. E. P., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., Ljung, G. M. Time Series Analysis: Forecasting and Control. 5th Edition. — Wiley, 2015.
4. NOAA Physical Sciences Laboratory NCEP/DOE Reanalysis II [Electronic resource]. — Режим доступа: <https://psl.noaa.gov/data/gridded/data.ncep.reanalysis2.html> (дата обращения: 06.11.2022).

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОПНЕВМОПРИВОДА ПОВОРОТНОГО ЗВЕНА РОБОТОТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Д.А. Эздеков, А.П. Припутников

tsg.limloki@mail.ru, a.priputnikov@samgups.ru

УДК 004.942, 681.5, 62-851.1

В работе представлена имитационная модель электропневмопривода поворотного звена робототехнической системы, разработанная в среде FluidSIM. Модель позволяет оценить логику управления, взаимодействие электрической и пневматической частей, а также работу элементов взаимоблокировки без использования реального оборудования. Приведены результаты моделирования переходных процессов, подтверждающие корректность функционирования системы и её пригодность для проектирования и отладки электропневматических приводов.

Ключевые слова: моделирование, FluidSIM, имитационная модель, поворотное звено, пневмопривод робототехника

Робототехнические системы повсеместно используются в технологических процессах промышленного производства для минимизации риска для жизни человека и расширения масштабов автоматизированного производства [1-4]. Для функционирования робототехнических систем (выполнения технологических операций) необходимы механизмы, обеспечивающие движение и реагирование на внешние сигналы в составе непрерывного технологического процесса. Одним из таких механизмов является поворотное звено, применяемое для изменения положения элементов манипуляторов, поворотных столов, конвейеров и других исполнительных устройств производственных комплексов [2, 4].

Эффективность внедрения робототехнических систем напрямую зависит от качества их проектирования и отладки. Проведение экспериментальных испытаний на реальном оборудовании сопряжено с риском повреждения дорогостоящих компонентов и требует значительных материальных и временных затрат, что создаёт необходимость использования имитационных моделей, которые позволяют отработать логику управления и выявить ошибки на ранних этапах без риска для дорогостоящего оборудования.

Математический метод имитационного моделирования [5-7] является одним из наиболее эффективных инструментов анализа динамики и функциональности исполнительных звеньев и систем управления робототехнических комплексов. Его использование позволяет исследовать характеристики электропневмоприводов и оптимизировать параметры управления без необходимости проведения экспериментов на реальном оборудовании. Для реализации данного подхода целесообразно применять специализированные программные средства моделирования, такие как FluidSIM [8, 9], обеспечивающие построение и исследование пневматических и электрических схем в виртуальной среде. Применение таких средств даёт возможность более

Эздеков Дамир Азаматович, студент, ПривГУПС (Самара, Россия); Damir Ezdekov (Volga State Transport University, Samara, Russia)

Припутников Алексей Петрович, к.т.н., доцент, ПривГУПС (Самара, Россия); Alexey Priputnikov (Volga State Transport University, Samara, Russia)

точно оценить работоспособность проектируемых систем и повысить эффективность их разработки.

В рамках работы реализуется имитационная модель электропневмопривода поворотного звена робототехнической системы, созданная в программной среде FluidSIM. Модель позволяет проанализировать последовательность работы элементов схемы, оценить логику управления и подтвердить корректность функционирования системы в условиях, приближённых к реальным.

В рассматриваемой системе управления поворотным звеном на базе пневмопривода, реализовано управление движением по часовой и против часовой стрелки с помощью двух управляющих элементов и , выполняющие функцию абстрактных механических датчиков, зависящих от технологических операций.

Задача модели заключается в обеспечении корректного перемещения звена в указанных направлениях с защитой от конфликтов управления, например, при одновременном нажатии двух кнопок. Представленная на рисунке 1 имитационная модель электрической части системы является одной из двух частей полной модели и выполняет управляющую функцию, формируя сигналы для работы пневматической части системы.

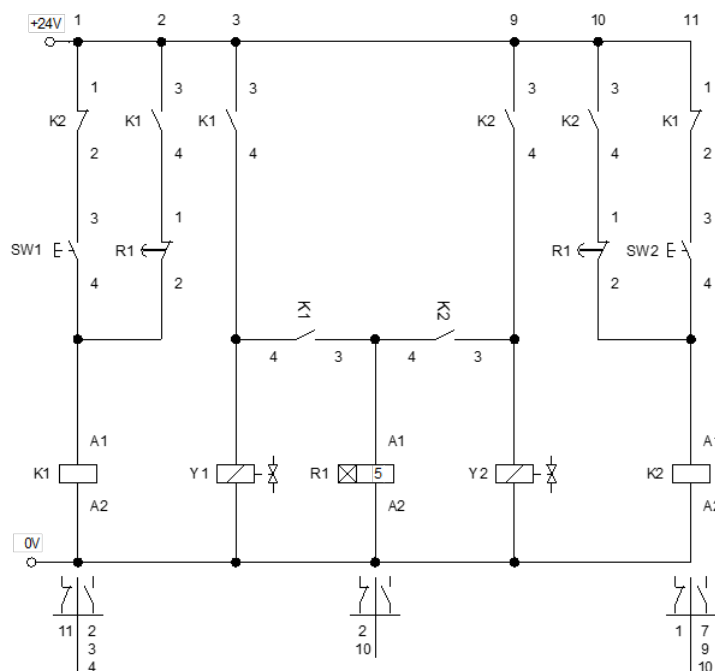


Рис. 1: Электрическая схема имитационной модели

Основой системы являются два независимых контура управления, реализованных на реле K1 и K2, обеспечивающих запуск рабочего цикла при срабатывании ключа SW1 или SW2 соответственно. Каждый контур управляет направлением вращения пневмодвигателя, а взаимоблокировка исключает одновременную активацию обоих направлений, предотвращая конфликт в управлении.

В исходном состоянии все цепи управления разомкнуты. При срабатывании ключа SW1 происходит замыкание цепи питания катушки реле K1. Аналогично, SW2 запускает контур с реле K2. Работа системы может быть проиллюстрирована на примере функционирования контура K1.

Замыкание ключа SW1 обеспечивает подачу питающего напряжения на катушку реле K1, запускающую дальнейшую цепь управления. Срабатывание реле K1 вызывает одновременные изменения в трёх параллельных силовых ветвях:

- ветвь 3: подача напряжения на соленоид Y1, который переключает пневмораспределитель V1, обеспечивая подачу воздуха для вращения пневмодвигателя по часовой стрелке (для SW2 - вращение против часовой стрелки соответственно).
- ветвь 4: включение реле времени R1, запускающего отсчёт фиксированного интервала в 5 секунд.
- ветвь 2: питание катушки реле K1, реализующее схему самоподхвата и поддерживающее активное состояние контура даже после прекращения воздействия с датчика SW1.

При этом размыкается нормально-замкнутый контакт реле K1 в ветви 11, который служит взаимоблокировкой для SW2, предотвращая питание катушки реле K2 и исключая одновременное включение пневмопривода в обоих направлениях.

По завершении установленного интервала 5 сек. (параметр настраивается в зависимости от технологического процесса) реле времени R1 срабатывает, размыкая контакт в ветви 2, что приводит к обесточиванию катушки реле K1. Все его контакты возвращаются в исходное состояние, отключая силовые ветви, соленоид Y1 и сам таймер. Контакт K1 взаимоблокировки (см. ветвь 11 рисунок 1) вновь замыкается, предоставляя возможность работы контура K2. Пневмодвигатель останавливается.

Контур K2 функционирует аналогично, но управляет соленоидом Y2, который изменяет направление вращения пневмодвигателя в противоположную сторону. Взаимоблокировка гарантирует, что активен может быть только один контур, обеспечивая безопасную и надёжную работу системы.

Имитационная модель пневматической части системы, представленная на рисунке 2, управляется с помощью вышеописанной электрической схемы. Источником сжатого воздуха является элемент AIR, от которого воздух поступает в блок подготовки воздуха, выполняющий функции очистки, осушения и поддержания заданного давления в системе. После блока подготовки сжатый воздух подаётся к пневмораспределителю, управление которым осуществляется соленоидами Y1 и Y2, активируемыми реле K1 и K2 соответственно (см. рисунок 1).

В зависимости от сработавшего соленоида распределитель изменяет своё положение, направляя поток воздуха по одной из двух магистралей, что определяет направление вращения пневмодвигателя. Перед поступлением в двигатель воздух проходит через дроссельный клапан OK1 (OK2), который позволяет регулировать расход воздуха и, соответственно, скорость вращения двигателя.

Для контроля параметров работы в модели предусмотрены манометры M1, M2 и M3, отображающие давление воздуха в различных участках системы, что обеспечивает возможность визуального контроля корректности

работы отдельных элементов.

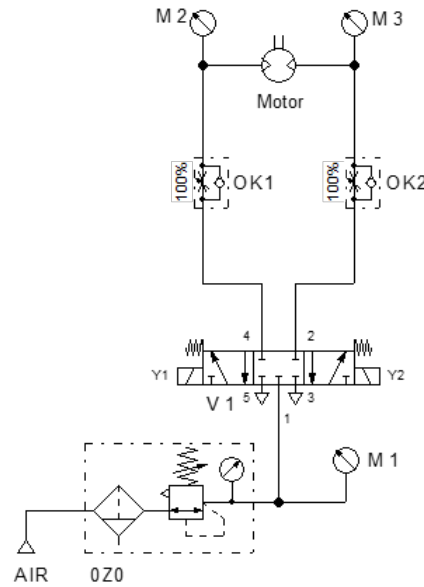


Рис. 2: Пневматическая схема имитационной модели

Графики переходных процессов работы электропневмопривода поворотного звена, представленные на рисунке 3, служат для оценки работы имитационной модели и отражают динамику основных параметров системы: скорость пневмодвигателя, положение пневмораспределителя, давление в манометрах M1-M3, состояние реле времени R1 и управляющих элементов SW1 и SW2.

В момент времени t_1 при замыкании цепи на SW1 давление в магистрали M2 существенно растёт, пневмораспределитель занимает крайнее правое положение, а пневмодвигатель начинает вращение по часовой стрелке. Одновременно на графике состояния управляющих элементов фиксируется активное состояние SW1, а реле времени R1 запускает отсчёт установленного интервала в 5 секунд.

В момент времени t_2 реле времени R1 срабатывает, вследствие чего пневмодвигатель останавливается, пневмораспределитель возвращается в исходное положение, а давление в манометрах M2 и M3 постепенно уравнивается, стремясь к среднему значению (0,3 МПа).

В момент времени t_3 при замыкании цепи на SW2 давление в магистрали M3 существенно растёт, пневмораспределитель занимает крайнее левое положение, а пневмодвигатель начинает вращение против часовой стрелки. Одновременно на графике состояния управляющих элементов фиксируется активное состояние SW2, а реле времени R1 запускает отсчёт установленного интервала в 5 секунд.

В момент времени t_4 реле времени срабатывает, параметры возвращаются в состояния, аналогичные моменту t_2 .

В момент времени t_5 система приходит в состояние покоя: пневморас-

пределитель и пневмодвигатель находятся в исходном положении.

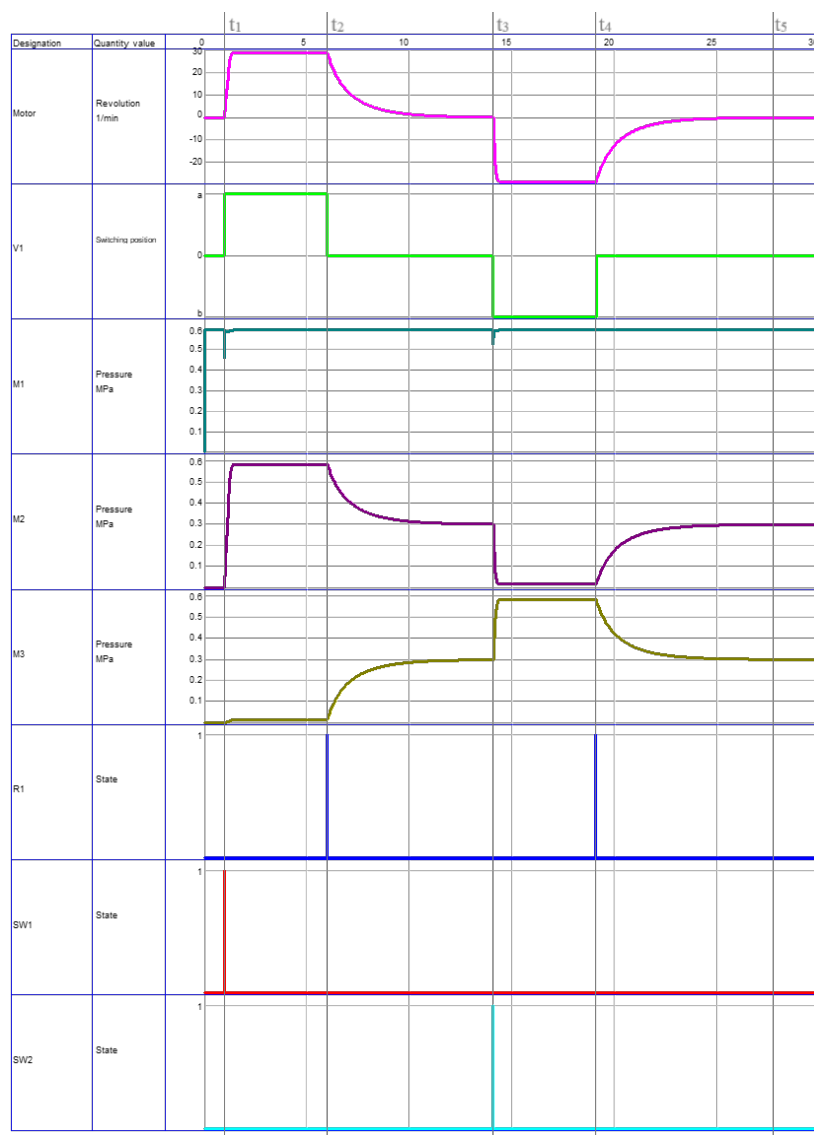


Рис. 3: Графики переходных процессов работы электропневмопривода поворотного звена

В работе создана имитационная модель электропневмопривода поворотного звена робототехнической системы в среде FluidSIM. Модель позволила проверить корректность работы системы управления, убедиться в правильном функционировании пневмодвигателя, срабатывании элементов в системе.

Использование предлагаемой имитационной модели обеспечивает возможность безопасного анализа и отладки системы без риска повреждения оборудования, что позволяет оптимизировать управление поворотными элементами в производственных процессах. Результаты работы демонстриру-

ют практическую применимость модели для проектирования и тестирования электропневматических приводов в робототехнике.

Литература

1. *Лебакин, И.В.* Робототехническая система изготовления резинового покрытия / И. В. Лебакин, И. Л. Сандлер // Мехатроника, автоматизация и управление на транспорте: Материалы VI Всероссийской научно-практической конференции, Самара, 29 марта 2024 года. — Самара: Самарский государственный университет путей сообщения, 2024. — 192–196. — EDN GOBBDG.
2. *Карпукhin, Э.Г.* Робототехнический комплекс монтажа электронных компонентов в производстве печатных плат / Э. Г. Карпукhin, А. П. Припутников // Мехатроника, автоматизация и управление на транспорте: Материалы VI Всероссийской научно-практической конференции, Самара, 29 марта 2024 года. — Самара: Самарский государственный университет путей сообщения, 2024. — 230–233. — EDN DERBMP.
3. *Брагина, И.Н.* Распределительный робототехнический комплекс для системы внутрицеховой логистики / И. Н. Брагина, И. Л. Сандлер // Мехатроника, автоматизация и управление на транспорте: Материалы VI Всероссийской научно-практической конференции, Самара, 29 марта 2024 года. — Самара: Самарский государственный университет путей сообщения, 2024. — 209–212. — EDN EOSYQV.
4. *Разливанов, В.С.* Робототехническая конвейерная сварочная система / В. С. Разливанов, А. П. Припутников // Мехатроника, автоматизация и управление на транспорте: Материалы VI Всероссийской научно-практической конференции, Самара, 29 марта 2024 года. — Самара: Самарский государственный университет путей сообщения, 2024. — 221–224. — EDN WHWCYU.
5. *Бурьков, Д.В.* Математическое и имитационное моделирование электротехнических и робототехнических систем: учебное пособие / Д. В. Бурьков, Ю. П. Волощенко. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2020. — 159 с. — ISBN 978-5-9275-3625-2. URL: <https://e.lanbook.com/book/170318> (дата обращения: 14.11.2025).
6. *Вьюненко, Л.Ф.* Имитационное моделирование: учебник и практикум для вузов / Л. Ф. Вьюненко, М. В. Михайлов, Т. Н. Первозванская; под редакцией Л. Ф. Вьюненко. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 283 с. — ISBN 978-5-534-01098-5. — URL: <https://urait.ru/bcode/535982> (дата обращения: 14.11.2025).
7. *Худякова, Е.В., Липатов А.А.* Имитационное моделирование процессов и систем в АПК. — Москва : Издательско-книготорговый центр «Колос-с», 2021. — 256 с. — ISBN 978-5-00129-054-4. — EDN XXWYPN.
8. *Воссин, А.В.*, Моделирование электрогидравлической системы управления сверлильного станка / А. В. Воссин // Наука и образование транспорту, 2 (2021), 101–105. — EDN UTODBF.
9. *Sandler I.L., Ivanov D.V., Terekhin M.A., Bragina I.N., Lebakin I.V., Zaripov R.A.* Simulation Model of a Pneumatic Drive for Compressing Electrodes of Stationary Contact Spot Welding Machine // 5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), 08–10 November 2023, Lipetsk, Russia. — Lipetsk: Lipetsk State Technical University, 2023. — 608–612. — URL: <https://doi.org/10.1109/summa60232.2023.10349376>.

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ГЕНЕРАТОРА ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ КВАТЕРНИОННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СРЕДСТВАМИ BLENDER PYTHON API

Д.А. Эздеков, М.Н. Федоров, И.Л. Сандлер,
С.А. Колпашиков, Н.А. Макаров

*tsg.limloki@mail.ru, kotika20000@gmail.com, sandler.il@ssau.ru,
skolpaschikov@mail.ru, m4ginik@yandex.ru*

УДК 004.94:511.84:004.42:004.92

В статье представлен программный модуль для генерации случайных трёхмерных объектов с использованием кватернионного описания вращений. Он обеспечивает корректную ориентацию объектов и равномерное распределение их направлений в пространстве. Реализация выполнена на Blender Python API с библиотекой *mathutils* для работы с кватернионами и преобразованиями объектов. Модуль позволяет настраивать параметры сцены, включая состав объектов, угол поворота, расстояния между элементами и размеры рабочей области и может быть использована для создания тестовых данных и проверки алгоритмов в задачах 3D-моделирования, робототехники и компьютерной графики.

Ключевые слова: кватернион, математика, трёхмерное моделирование, ориентация объектов, компьютерная графика, робототехника

В современных задачах трёхмерного моделирования, робототехники и компьютерной графики всё большую роль играет корректное описание ориентации и вращения объектов в пространстве. Для этих целей широко используются кватернионы [1, 2], обладающие рядом преимуществ перед традиционными методами представления поворотов, такие как углы Эйлера или матрицы представления. Для проверки корректности и устойчивости алгоритмов, основанных на кватернионном представлении вращений, требуется наличие множества тестовых данных, характеризующих разные положения и ориентации объектов. Создание таких данных вручную представляет собой трудоёмкий процесс, что вызывает необходимость в разработке программы, обеспечивающей генерацию случайных трёхмерных объектов с произвольным положением и ориентацией в пространстве. Сгенерированные данные могут использоваться для анализа поведения и точности алгоритмов выравнивания поведения и точности алгоритмов выравнивания объектов относительно эталонного положения с применением кватернионных вычислений. Таким образом, разработанная программа позволяет

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение №075-02-2025-179.

Эздеков Дамир Азаматович, студент, ПривГУПС (Самара, Россия); Damir Ezdekov (Volga State Transport University, Samara, Russia)

Федоров Максим Николаевич, студент, ПривГУПС (Самара, Россия); Maxim Fedorov (Volga State Transport University, Samara, Russia)

Сандлер Илья Львович, лаборант-исследователь самарского подразделения НОМЦ ПФО, Самарский университет; ст. преп. кафедры АУТС, СамГТУ (Самара, Россия); Ilya Sandler (Samara University; SSTU, Samara, Russia)

Колпашиков Сергей Александрович, доцент, к.т.н., СамГТУ (Самара, Россия); Sergey Kolpaschikov (Samara State Technical University, Samara, Russia)

Макаров Никита Артемович, студент, СамГТУ (Самара, Россия); Nikita Makarov (Samara State Technical University, Samara, Russia)

упростить процесс подготовки тестовых данных и способствует более объективной оценке корректности реализации алгоритмов пространственного вращения.

В основе программной реализации кватернионного представления поворотов лежит математический аппарат кватернионной алгебры [3–5], включающей методы векторной и линейной алгебры.

Пусть q_0 — эталонный кватернион ориентации объекта. Для создания вариаций применяется малый случайный поворот q_r , задаваемый случайной осью n и случайным малым углом θ .

Случайная ось поворота n выбирается как нормализованный вектор с компонентами из равномерного распределения U :

$$n = \frac{(r_x - 0.5, r_y - 0.5, r_z - 0.5)}{\|r_x - 0.5, r_y - 0.5, r_z - 0.5\|}, \text{ для } r_x, r_y, r_z \sim U[0, 1] \quad (1)$$

Случайный малый угол поворота θ выбирается равномерно из диапазона $[-\theta_{\max}, \theta_{\max}]$:

$$\theta \sim U[-\theta_{\max}, \theta_{\max}] \quad (2)$$

В координатной записи кватернион случайного поворота q , можно представить как 4-мерный вектор, вычисляемый через ось и угол поворота по формуле (3):

$$q_r = \left(\cos \frac{\theta}{2}, n_x \sin \frac{\theta}{2}, n_y \sin \frac{\theta}{2}, n_z \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (3)$$

где $\cos \frac{\theta}{2}$ — скалярная часть кватерниона;

$n_x \sin \frac{\theta}{2}, n_y \sin \frac{\theta}{2}, n_z \sin \frac{\theta}{2}$ — векторная часть кватерниона.

Итоговая ориентация нового объекта формируется как композиция [3] эталонного кватерниона q_0 и случайного поворота q_r :

$$q_i = q_0 \circ q_r \quad (4)$$

где q_r — кватернион случайного поворота, который будет применён к объекту;

q_0 — эталонный кватернион, который задаёт исходную ориентацию объекта;

q_i — итоговый кватернион, который описывает новую ориентацию объекта.

Теоретические основы кватернионной алгебры служат базой для практической реализации алгоритмов генерации случайных поворотов в программной среде. Для данной задачи важно, чтобы среда обеспечивала:

- представление ориентации объектов через кватернионы с возможностью выполнения операций умножения и нормализации;
- прямое применение вычисленных поворотов к объектам сцены и возможность визуальной проверки результатов;
- автоматизированное создание и управление множеством объектов с различными ориентациями без ручного вмешательства.

С учётом требований была выбрана платформа **Blender** с его **Python** API (**bpy**) [6, 7] и вспомогательной библиотекой «Mathutils». Класс «Class Quaternion» библиотеки «Mathutils» представляет полное представление кватерниона, позволяя использовать алгебру кватернионов.

Модуль «bpy» (Blender Python) обеспечивает доступ к объектам сцены, их трансформациям и визуализации, что позволяет реализовать весь процесс генерации случайных ориентаций и тестирования алгоритмов выравнивания в единой автоматизированной среде, при этом язык программирования Python обеспечивает простоту интеграции вычислений кватернионов с инструментальной средой.

Для обеспечения настройки параметров генерации сцены в разработанной программе предусмотрена возможность изменения ряда входных величин, определяющих состав и характеристики распределяемых объектов. В таблице 1 приведены основные настраиваемые параметры программы, используемые для управления процессом генерации случайных объектов. Управление параметрами позволяет моделировать различные конфигурации среды, варьируя как количественные, так и пространственные характеристики элементов.

Таблица 1: Изменяемые параметры программы генерации объектов

№п/п	Наименование параметра	Описание параметра	Значение
1.	NUM_IDENTICAL	Ввод количества молекул воды, идентичных эталонной	4
2.	NUM_SIMILAR	Ввод количества молекул воды, похожих на эталонную	3
3.	NUM_DIFFERENT	Ввод количества молекул воды, значительно отличающихся от эталонной	5
4.	NUM_CUBES	Ввод количества кубов	3
5.	NUM_SPHERES	Ввод количества сфер	5
6.	NUM_CYLINDERS	Ввод количества цилиндров	3
7.	NUM_PYRAMIDS	Ввод количества пирамид	5
8.	NUM_CONES	Ввод количества конусов	2
9.	PLACEMENT_BOX	Ввод размеров пространства для заполнения объектами	10.0
10.	MIN_DISTANCE	Ввод минимального расстояния между объектами	2.5
11.	OBJECT_RADIUS	Ввод приблизительного радиуса объекта для проверки пересечений	1.0

Фрагменты результатов работы программы в виде крупного плана отдельных сгенерированных объектов представлены на рисунках 1 А – 1 Е. Каждое изображение демонстрирует геометрическую форму, использованную, но не ограничивающую возможность дальнейшего изменения и усложнения сгенерированной модели. Представленные примеры включают базовые фигуры, которые используются в тестовом наборе: молекула воды (рисунок 1 А), цилиндр (рисунок 1 Б), куб (рисунок 1 В), пирамида (рисунок 1 Г), сфера (рисунок 1 Д) и конус (рисунок 1 Е).

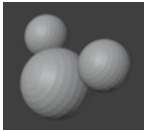
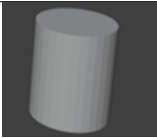
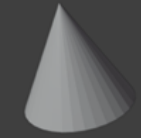
		
А — Молекула воды	Б — Цилиндр	В — Куб
		
Г — Пирамида	Д — Сфера	Е — Конус

Рис. 1: Внешний вид базовых фигур для генерации

В результате работы программы формируется трёхмерная сцена, содержащая совокупность сгенерированных объектов различной формы и ориентации. Размещение каждого объекта осуществляется на основе случайных координат центра и кватернионного поворота, что обеспечивает распределение объектов в пределах заданного объёма пространства. При этом соблюдается ограничение на минимальное расстояние между объектами, предотвращаются их пересечение и наложение геометрий. На рисунке 2 приведён пример итоговой сцены, полученной при использовании параметров, указанных в таблице 1. Видно, что объекты распределены по всему объёму и с сохранением пропорций. Использование кватернионного описания вращений позволяет избежать систематических искажений в ориентациях объектов, характерных для представления с углами Эйлера. Результирующая сцена служит базовой моделью для последующего этапа обработки.

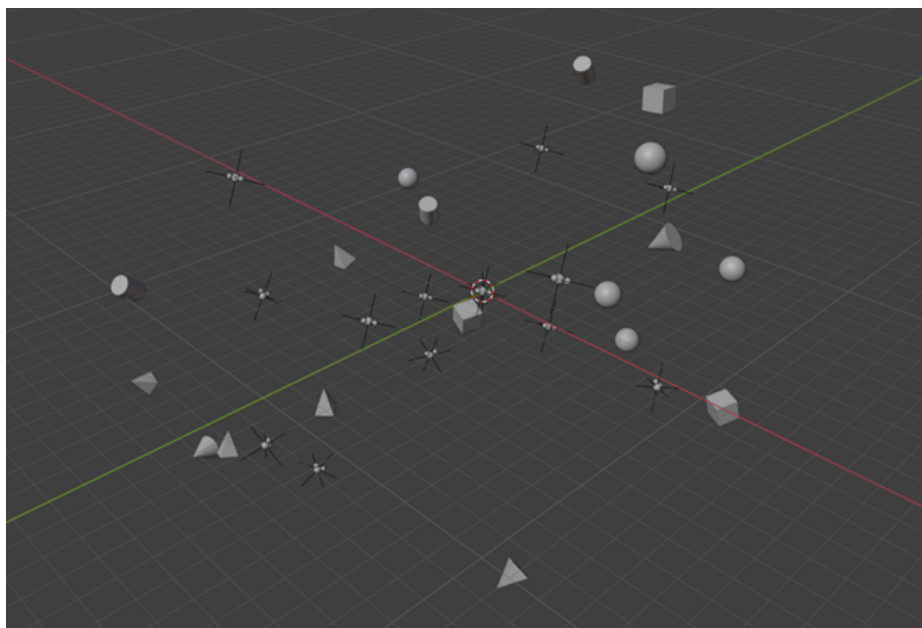


Рис. 2: Итоговая сцена после генерации

В ходе работы была разработана и реализована программа для генерации случайных трёхмерных объектов с использованием кватернионного

описания вращений. Разработанная система предусматривает возможность изменения параметров генерации, включая состав сцены, диапазон поворота объектов, минимальные расстояния между объектами и размеры рабочей области. Такой подход обеспечивает гибкость и воспроизводимость экспериментов, а также позволяет проводить моделирование сцен различной плотности и сложности.

Полученные результаты подтверждают эффективность применения алгебры кватернионов для решения задач пространственной ориентации и формирования трёхмерных структур. Программная реализация может быть использована в задачах компьютерной графики, робототехники, а также при обучении систем искусственного интеллекта, требующих анализа пространственных данных [8].

Литература

1. Митюшов Е.А., Мисюра Н.Е., Берестова С.А., К 175-летию открытия кватернионов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, **28**:4 (2018), 611–617. — DOI 10.20537/vm180412. — EDN YVNNHF.
2. Цегельник В.В., Стародубец А.С., Кватернионы, их представление и применение. Кватернионы и повороты пространства // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика, **6**:6(42) (2018), 400–402. — EDN YUDMKD.
3. Амелькин Н.И. Динамика твердого тела. — Москва: МФТИ, 2010. — 80 с. — ISBN 978-5-7417-0347-2.
4. Арсеньев В.Д., Селиванова Л.М. Основы алгебры кватернионов и их использование при решении задач ориентации. — Москва: Изд-во МГТУ, 2003. — ISBN 5-7038-2416-8. — EDN QNRDZZ.
5. Кравчук Е.В., Вращения в трехмерном пространстве и кватернионы // Вестник магистратуры, 2-2(77) (2018), 4–8. — EDN NRIDHB.
6. Вихляев Д.Р., Управление объектами в Blender с помощью Blender Python API // Постулат, 6(80) (2022). — EDN LVSQJF.
7. Conlan Chris. Blender Python API: Precision 3D Modeling and Add-on Development. — Berkeley, CA: Apress, 2017. — ISBN 978-1-4842-2801-2.
8. Дряба А.Ю., Построение 3D-модели объекта по набору его изображений при помощи нейронной сети на базе алгоритма NeRF // Математическая физика и компьютерное моделирование, **26**:4 (2023), 31–42. — DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.3. — EDN QEDRRRC.

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ РИМАНА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Ю.О. Яковлева
julia.yakovleva@mail.ru

УДК 517.956.3

Краевые задачи для некоторых систем дифференциальных уравнений гиперболического типа могут быть решены методом Римана. При этом решение задач Коши и Гурса может быть получено в явном виде с помощью матрицы Римана. В работе рассматривается метод построения матрицы Римана для одной системы гиперболических уравнений четвертого порядка.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений гиперболического типа четвертого порядка, метод Римана, матрица Римана, гипергеометрическая функция матричного аргумента

Построение решения краевой задачи для системы гиперболических дифференциальных уравнений четвертого порядка в явном виде может быть осуществлено с помощью матрицы Римана.

Для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа

$$MU \equiv U_{x_1 x_2 x_3 x_4} + \Omega U = 0, \quad (1)$$

где $U(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — искомая m -мерная вектор-функция, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, Ω — постоянная матрица размера $(m \times m)$, элементами которой являются действительные числа, оператор

$$M^*V \equiv V_{x_1 x_2 x_3 x_4} + V\Omega,$$

где $V(x_1, x_2, x_3, x_4; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ — квадратная матрица порядка m , является сопряженным по Лагранжу.

Матрицей Римана $V = V(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ для системы уравнений (1) называется решение специальной задачи типа Гурса

$$M^*V = 0,$$

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)|_{x_1=\xi_1} = (x_1 - \xi_1) E,$$

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)|_{x_2=\xi_2} = (x_2 - \xi_2) E,$$

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)|_{x_3=\xi_3} = (x_3 - \xi_3) E,$$

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)|_{x_4=\xi_4} = (x_4 - \xi_4) E,$$

где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, E — единичная матрица порядка m .

Введем новые переменные $t = x_1 - \xi_1$, $s = x_2 - \xi_2$, $p = x_3 - \xi_3$, $q = x_4 - \xi_4$. Матрицей Римана $V(t, s, p, q)$ является решение матричного уравнения

$$V_{tspq} + V\Omega = 0, \quad (2)$$

Яковлева Юлия Олеговна, к.ф.-м.н., доцент, Самарский университет (Самара, Россия); Julia Yakovleva (Samara University, Samara, Russia)

удовлетворяющее условиям

$$V(t, 0, 0, 0) = tE,$$

$$V(0, s, 0, 0) = sE,$$

$$V(0, 0, p, 0) = pE,$$

$$V(0, 0, 0, q) = qE.$$

Пусть

$$V = W(\sigma),$$

где $\sigma = tspq$, тогда уравнение (2) преобразуется к следующему виду

$$\sigma^3 W^{IV}(\sigma) + 6\sigma^2 W'''(\sigma) + 7\sigma W''(\sigma) + W'(\sigma) + W(\sigma)\Omega = 0$$

при этом $W(0) = E$.

Если $\delta \equiv \sigma \frac{d}{d\sigma}$, то получим матричное уравнение

$$\delta^4 W = -\sigma W\Omega. \quad (3)$$

Решение матричного уравнения (3) можно отыскать в виде

$$W(\sigma) = -\sum_{k=0}^{\infty} A_k \sigma^k, \quad (4)$$

где A_k — постоянные квадратные матрицы размера $m \times m$.

Используя для матриц символ Похгаммера $(A)_k = A(A + E) + \dots + [A + (k - 1)E]$, получим

$$k^4 A_k = A_{k-1}, \quad A_0 = E.$$

и следующую рекуррентную формулу:

$$A_k = \frac{1}{(1)_k(1)_k(1)_k k!} \Omega^k. \quad (5)$$

Из (4), (5) получаем, что

$$W(\sigma) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1)_k(1)_k(1)_k k!} \sigma^k \Omega^k.$$

Таким образом, матрица Римана для системы уравнений (1) построена в явном виде

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, x_3, x_4; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \\ = {}_0F_3(1; 1; 1; -(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_3 - \xi_3)(x_4 - \xi_4)) \Omega, \end{aligned}$$

где ${}_0F_3(1; 1; 1; -(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_3 - \xi_3)(x_4 - \xi_4)) \Omega$ — гипергеометрическая функция матричного аргумента.

Литература

1. Андреев А.А., Яковлева Ю.О., Задача Гурса для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка с двумя независимыми

переменными // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, **3**:24 (2011), 35–41.

2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — Москва: Наука, 1988. — 549 с.

3. *Миронов А.Н., Миронова Л. Б., Яковлева Ю. О.*, Метод Римана для уравнений с доминирующей частной производной // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки **2**:25 (2021), 207–240.

4. *Яковлева Ю.О.*, Матрица Римана для некоторых систем уравнений гиперболического типа высокого порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки **4**:28 (2024), 799–808.

5. *Яковлева Ю.О., Тарасенко А.В.*, Решение задачи Коши для системы уравнений гиперболического типа четвертого порядка методом Римана // Вестник Самарского университета. Естественная серия **3**: 25 (2019), 33–38.

Оглавление

Предисловие	3
<i>V.L. Litvinov, K.V. Litvinova</i> , Study of free longitudinal oscillations of a variable-length rod	4
<i>M. Novikov, N. Krainiukov</i> , Schützenberger hierarchy of regular languages and algorithms for testing low levels of hierarchy	6
<i>K.V. Seroshtanova, V.V. Volchkov</i> , On the integral condition in the theorem on the complete differential	10
<i>К.Н. Альдебенева, Д.В. Чаплий</i> , О нелинейной проблеме собственных значений, возникающей из краевой задачи механики разрушения	12
<i>Г.С. Анисимов, Л.В. Степанова</i> , Особенности применения генеративно-состязательной сети для вычисления параметров механики разрушения	15
<i>В.Н. Анискин, В.И. Богословский, Т.В. Добудько, О.И. Пугач</i> , Применение искусственно-интеллектуальных и нейросетевых технологий в обучении математике и информатике	18
<i>В.А. Артамонов</i> , Децентрализованная фиксация академических достижений на основе NFT	22
<i>Н.А. Баранов</i> , Интерполяция данных измерений приземной концентрации загрязняющих веществ с учетом локальной скорости ветра	26
<i>К.А. Батенков</i> , Аналитическое моделирование качества видеотелефонии на основе расширенной модели телетрафика	28
<i>Ю.Н. Базарева</i> , Моделирование сжатие диска с отверстием: комплексный подход	31
<i>О.Н. Белова, Л.В. Степанова</i> , Атомистическое моделирование циклического нагружения алюминиевой пластины, находящейся на кремниевой подложке	34
<i>О.Н. Белова, Л.В. Степанова, Д.В. Чаплий</i> , Анализ асимптотики и автомодельности механических полей в окрестности трещиноподобного дефекта в пластине, находящейся в условиях ползучести с учетом роста поврежденности	36
<i>А.И. Блатов, Е.В. Китаева</i> , Неполная факторизация двумерной модели горения	38
<i>Н.П. Бондаренко</i> , Обратная спектральная задача для матричного уравнения Штурма-Лиувилля	41
<i>В.В. Бондаренко, В.Ю. Живцов, Е.О. Манякова</i> , Применение методов математического и функционального анализа для исследования смарт-контрактов	44
<i>К.А. Буланова, С.А. Лычев, Л.В. Степанова</i> , Разработка алгоритма со-бытийной молекулярной динамики для модели жестких сфер	49
<i>О.В. Видилина</i> , Оптимальное быстроедействие для системы с двумя ма-лыми параметрами	51

<i>А.В. Волчков, С.А. Руссиян</i> , О единственности функций с некоторыми интегральными условиями	53
<i>Д.В. Галущкина, А.Н. Кувшинова</i> , Построение дискретной модели уравнения конвекции-диффузии-реакции в пространстве состояний с использованием безусловно положительной конечно-разностной схемы	55
<i>А. Гацко, Л. В. Степанова</i> , Моделирование процессов разрушения методом молекулярной динамики: сравнение с аналитическими решениями классической механики	59
<i>В.Л. Дильман, А.Е. Кащеева</i> , Об обратной внутренней граничной задаче для обобщенных уравнений критического состояния дискретно-неоднородных соединений	63
<i>Е.С. Долгова, В.А. Соболев, Е.А. Щепаккина</i> , Дробно-иррациональные аппроксимации	65
<i>Д.С. Ермолин, А.А. Семенов</i> , Нелинейные деформации вертикального резервуара при снижении уровня гидростатической нагрузки	68
<i>В.М. Ершов</i> , Сходимость слабого жадного алгоритма с переменным параметром	73
<i>Н.А. Зайчикова</i> , Особенности проведения социометрии среди студентов IT-направления при использовании электронных средств	75
<i>И.М. Избяков</i> , О множестве векторов модулей измерений сигнала полными системами	79
<i>О.С. Кипкаева, Е.А. Щепаккина</i> , Некоторые сценарии затягивания потери устойчивости	81
<i>А.С. Кирсанова</i> , Редукция динамической модели вертогенератора Дарье	84
<i>К.А. Коннова, В.А. Соболев</i> , Матричные Паде-аппроксимации в задаче расщепления уравнений гироскопических систем	87
<i>Л.А. Леонаева, Л.В. Степанова</i> , Моделирование механического отклика поликристаллических материалов в пакете ATOMSK	89
<i>Г.В. Лисейкин, А.А. Петрова</i> , Математическое моделирование эксперимента по определению частотных характеристик цифровой системы управления летательного аппарата	92
<i>Любимов Е.А.</i> , 3D-печать как инструмент экспериментальной механики	95
<i>В.В. Любимов, П.С. Чеботарева</i> , Математическое моделирование перестройки одной плоской спирали	98
<i>И.С. Лямин, А.В. Голубков</i> , Автоматизация идентификации параметров математических моделей аккумуляторов	101
<i>М.К. Макарова, Д.Л. Головашкин</i> , Совместное использование агентного моделирования и аппарата нейронных сетей для выявления факторов, влияющих на исторический процесс во времена древнекитайской династии Чжоу (период Борющихся царств)	106
<i>А.С. Макин</i> , О системах корневых функций максимального оператора Дирака	111
<i>И.В. Макляев, С.П. Дударов</i> , Методы аугментации данных ограниченного объема в задачах моделирования биотехнологических процессов	113
<i>С.Я. Новиков</i> , Выпрямляющие фреймы и инъективность ReLU-слоев .	117
<i>Р.А. Олин, М.Е. Федина, В.Ю. Живцов</i> , Образовательный потенциал метавселенных	120
<i>С.В. Подклетнова</i> , Задача N для уравнения Эйлера-Дарбу с двумя линиями вырождения в характеристических координатах и тривиальным коэффициентом при производной по ординате от искомой функции	123

<i>Р.И. Разимова</i> , Оценивание состояния для одной модели кардиостимулятора	125
<i>Т.П. Рубцова</i> , Применение регуляризованного алгоритма Качмажа при обучении нейросетей	130
<i>В.В. Севостьянова</i> , Конечные фреймы в пространствах со скалярным произведением	134
<i>В.В. Севостьянова</i> , Поля инвариантов для присоединенного действия унитарных групп	139
<i>В.П. Семенов</i> , Экспериментальный анализ полей перемещений и деформаций в окрестности вершины центральной трещины в растягиваемой прямоугольной пластине, изготовленной из алюминиевого сплава АМг6	141
<i>П.А. Смиряков</i> , RUC-свойство хаосов по симметричным случайным величинам в L_∞	145
<i>А.Н. Смирнова</i> , Интегральный аналог задачи Гурса для уравнения второго порядка	147
<i>Л.В. Степанова, К.А. Буланова</i> , Характерные особенности молекулярно-динамического моделирования нагружения ультратонкой алюминиевой пластины на кремниевом основании	149
<i>Л.П. Строкин</i> , Математическое моделирование теплового состояния ширмового пароперегревателя котла ТГМ-84	152
<i>А.В. Тарасенко</i> , Лекция — основная форма организации учебного процесса в вузе	154
<i>А.В. Тарасенко</i> , О задаче для нагруженного уравнения теплопроводности с оператором Римана–Лиувилля в краевом условии	157
<i>А.В. Теплов</i> , Дискретное моделирование расписания комплектации заказов для складских систем с автоматизированным конвейерным оборудованием	160
<i>Е.А. Тропкина</i> , Редукция модели доставки лекарств при наличии быстрого связывания с белками крови	165
<i>Е.П. Тугоносова, П.А. Голованов</i> , Прогнозирование потребности в специалистах на основе применения математического моделирования	167
<i>М.Е. Федина, В.Ю. Живцов, Е.О. Манякова</i> , Использование автономных интеллектуальных агентов для персонализации образовательных траекторий	170
<i>М.Н. Федоров, Д.А. Эздеков, И.Л. Сандлер, С.А. Колпацников, Н.А. Макаров</i> , Программная реализация алгоритма кватернионных вращений для пространственной ориентации на базе Blender Python API	175
<i>М.А. Фомченкова</i> , Определение Т-напряжений в анизотропных телах по данным МКЭ-вычислений	181
<i>Б.Н. Хабибуллин, Ф.Б. Хабибуллин</i> , Классы тестовых и радиально-угловых субгармонических функций с применениями к распределению корней голоморфных функций	184
<i>Е.В. Харитонов</i> , Цифровые двойники как инструмент адаптивного обучения	189
<i>М.Б. Чернов, А.В. Голубков</i> , Моделирование динамики потребления энергии электромобилем на основе реалистичного цикла движения для задач оценки состояния заряда аккумулятора	192
<i>Е.Е. Читоркин, Н.П. Бондаренко</i> , Равномерная устойчивость обратной задачи Штурма–Лиувилля на графе-звезде	197
<i>Д.А. Шаталов</i> , Применение метода динамического выравнивания для синхронизации измерений поперечного уровня железнодорожного пути	200

<i>С.С. Шестерина, Л.В. Степанова</i> , Анализ применения сверточных нейронных сетей для реконструкции изображений, получаемых методом цифровой фотоупругости	204
<i>Л.К. Ширяева</i> , О свойствах носителя нормальной копулы Граббса	207
<i>М.А. Шугурова</i> , Гибридная линейная регрессионная модель для моделирования сезонных временных рядов	211
<i>Д.А. Эздеков, А.П. Припутников</i> , Имитационное моделирование электропневмопривода поворотного звена робототехнической системы .	216
<i>Д.А. Эздеков, М.Н. Федоров, И.Л. Сандлер, С.А. Колпациков, Н.А. Макаров</i> , Программная реализация генератора трехмерных объектов на основе кватернионных преобразований средствами Blender Python API	222
<i>Ю.О. Яковлева</i> , Построение матрицы Римана для одной системы гиперболических уравнений четвертого порядка	227

Научное издание

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

МАТЕРИАЛЫ

III Всероссийской научной конференции

Самара, Россия
20–21 ноября 2025 г.

MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELLING

PROCEEDINGS

of the 3th All-Russian Scientific Conference

Samara, Russia
November 20–21, 2025

Подписано в печать 16.02.2026. Формат 60x84¹/₁₆.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Усл.-печ. л. 13,72. Печ. л. 14,63.

Тираж 200 экз.

ООО «Самарама»

443087, Самара, ул. Стара-Загора, 167.

Тел. 8 960 931 74 78.

E-mail: oraborodina@yandex.ru.

Отпечатано с оригинал-макета

в типографии ООО «Прайм».

г.443069, Самара, ул. Гагарина, д. 59.

Тел. 8 927 201 82 95.

Тексты статей печатаются в авторской редакции
Компьютерная верстка в пакете L^AT_EX, макет В.В. Севостьянова