IV Всероссийская научная конференция
«Математика и математическое моделирование»

Вариационный алгоритм ассимиляции данных измерений в моделях переноса загрязняющих примесей

Николай Алексеевич Баранов
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
ФИЦ ИУ РАН

Постановка задачи

$c_0(x,z)$ – поле концентраций загрязняющей примеси, рассчитанное по модели переноса
c_k – значения концентрации, измеренные в точках (x_k,z_k)

Требуется определить скорректированное поле концентраций $c(x,z)$ такое, что:
1. $c(x_k,z_k)= c_k$
2. $\nabla c(x,z) =\nabla c_0(x,z)$

$$\nabla c\,(x,z) = \left(\frac{\partial c\,(x,z)}{\partial x}, \frac{\partial c\,(x,z)}{\partial z}\right)$$

Распределение концентрации $c(x,z)$ будем искать в виде

$$c(x,z) =c_0(x,z)+ c_\delta(x,z)$$

где $c_\delta(x,z)$ минимизирует функционал

$$\mu \int \left(\nabla c_\delta\,(x,z)\right)^2 dxdz + \sum_{k=1}^{n} \left(c_\delta\,(x_k,z_k) - \hat{c}_{0k}\right)^2$$

Алгоритм решения

Введем декартову сетку узлов (x_i,z_j)

Для учета корреляции значений концентрации в узлах декартовой сетки, близко расположенных к точкам измерений (x_k,z_k) постороим промежуточное поле концентраций c'_{ij}

$$c'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot \phi_k (x_i, z_j, \sigma)$$

Весовые коэффициенты w_k вычисляются как решения системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot \phi_k (x_m, z_m, \sigma) = \hat{c}_{0m}, m = 1, ..., n$$

Значения корректирующих поправок $c_{\delta ij}=c_\delta(x_i,z_j)$ вычисляются как решение вариационной задачи минимизации функционала

$$J = \sum\sum \lambda_{ij} \left(c_{\delta ij} - c'_{ij}\right)^2 + \mu \cdot \sum_i \sum_j (1 - \lambda_{ij}) \cdot \left(g^2_{xij} + g^2_{zij}\right)$$

$$\lambda_{ij} = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \phi_k (x_i, z_j, \sigma_\mu))$$

Результаты моделирования

Модельное распределение

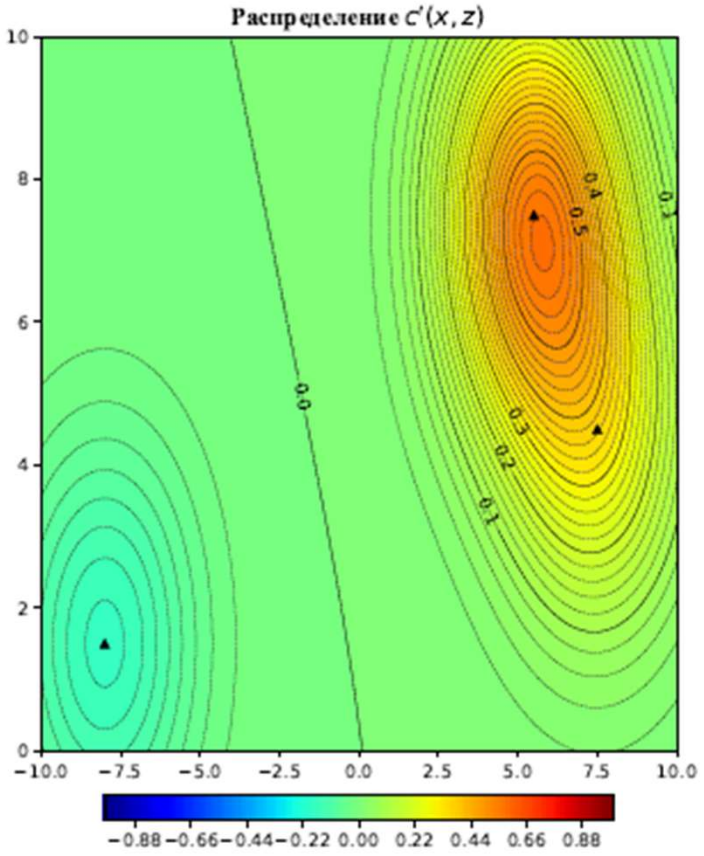
$$c_0(x,z) = \sin\left(0.015 \cdot \left(x^2 + z^2\right)\right)$$

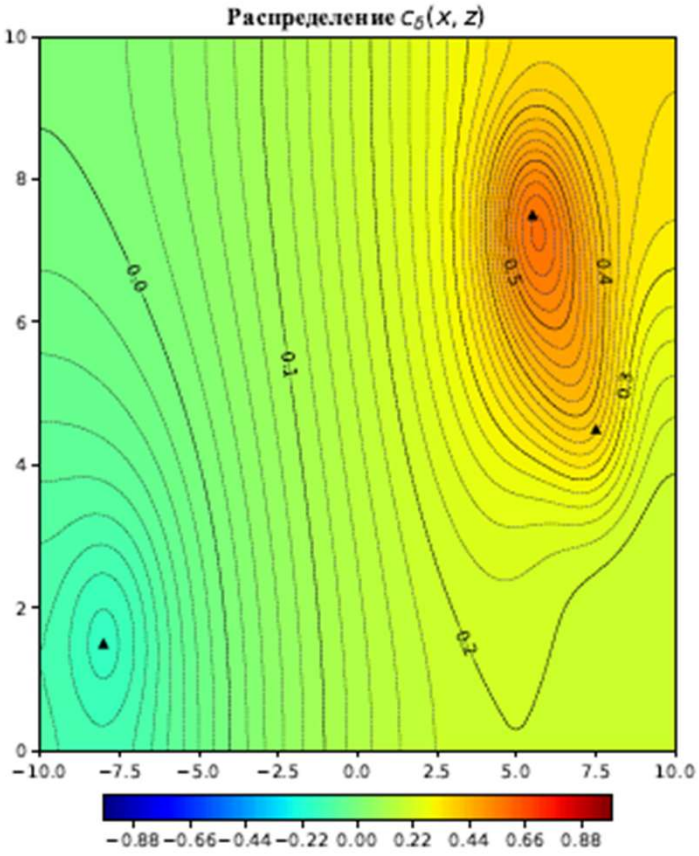
Измерения

$$(x_1, z_1) = (1.5, -8.0), \quad \hat{c}_{\delta 1} = -0.2 \cdot c_0(x_1, z_1);$$
$$(x_2, z_2) = (4.5, 7.5), \quad \hat{c}_{\delta 2} = 0.4 \cdot c_0(x_2, z_2);$$
$$(x_3, z_3) = (7.5, 5.5), \quad \hat{c}_{\delta 3} = 0.6 \cdot c_0(x_3, z_3)$$

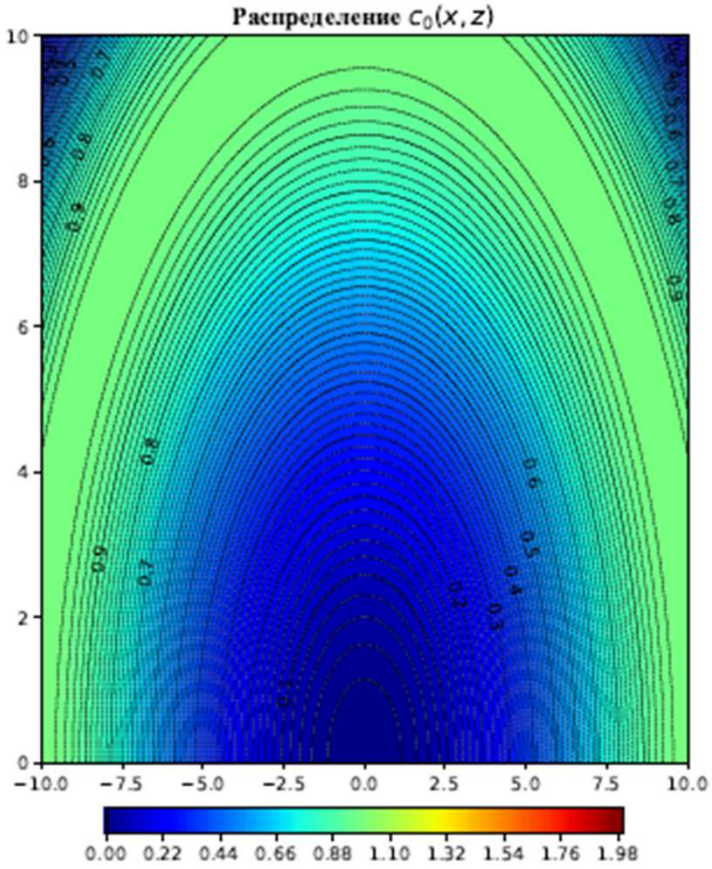
$$\sigma = 2,\ \sigma_\mu = 1,\ \mu = 0.1$$

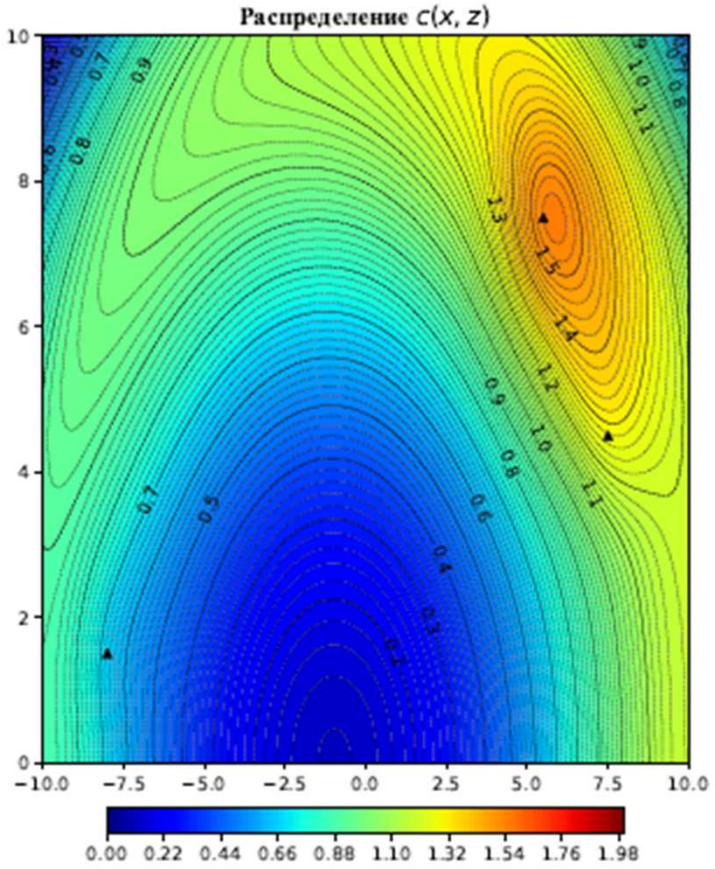
Результаты моделирования





Результаты моделирования





СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

Николай Алексеевич Баранов
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
ФИЦ ИУ РАН, Москва