ФИЛЬТРАЦИЯ КАЛМАНА–БЬЮСИ В ЧЕТЫРЕХЗОННОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ БИОАЭРОЗОЛЯ

Блатов Артем Игоревич, магистрант, Самарский университет
Китаева Елена Викторовна, к.ф.-м.н., доцент, Самарский университет

Рассматривается помещение, разделенное на четыре зоны: первая - зона источника загрязнения, вторая - рабочая зона, третья - зона приточной вентиляции, четвертая - зона вытяжной вентиляции.
Концентрацию аэрозольного загрязнителя в i-й зоне обозначим через $x_i(t)$.

$$\frac{dx_1}{dt} = -(\lambda_1 + k_{12} + k_{14})x_1 + k_{21}x_2 + k_{41}x_4 + \frac{q(t)}{V_1} + w_1(t), \qquad (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = k_{12}x_1 - (\lambda_2 + k_{21} + k_{23} + k_{24})x_2 + k_{32}x_3 + k_{42}x_4 + w_2(t), \qquad (2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = k_{23}x_2 - (\lambda_3 + k_{32} + k_{34})x_3 + w_3(t), \qquad (3)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = k_{14}x_1 + k_{24}x_2 + k_{34}x_3 - (\lambda_4 + k_{41} + k_{42})x_4 + w_4(t). \qquad (4)$$

Здесь λ_i — коэффициенты удаления загрязнителя, k_{ij} — коэффициенты межзонного переноса, $q(t)$ — интенсивность источника загрязнения, V_1 — объём первой зоны, $w_i(t)$ — случайные возмущения модели.

В матричной форме система (1)-(4) записывается как

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t), \tag{5}$$

где $u(t) = q(t)$.

Для дискретизации задачи (5) введем сетку по временной переменной $t_k = k\Delta t$. Использование метода Эйлера приводит задачу (5) к виду

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k + w_k, \tag{6}$$

Для дискретной задачи (6) используется фильтр Калмана-Бьюси:

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_d \hat{x}_{k|k} + B_d u_k,$$

$$P_{k+1|k} = A_d P_{k|k} A_d^T + Q_d,$$

$$r_{k+1} = y_{k+1} - H\hat{x}_{k+1|k},$$

$$S_{k+1} = H P_{k+1|k} H^T + R,$$

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} H^T S_{k+1}^{-1},$$

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} r_{k+1}.$$

Ковариация ошибки обновляется по формуле

$$P_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1}H) P_{k+1|k} (I - K_{k+1}H)^T + K_{k+1} R K_{k+1}^T.$$

Исследовалось влияние количествах датчиков и шума измерений. Рассматривались матрицы $Q = 0{,}01I_4$ (ковариационная матрица случайных возмущений модели), $H = H_1$ (датчик установлен только во второй зоне), $H = H_2$ (датчик установлен во второй и четвертой зонах), $H = H_3$ (датчик установлен в первой, во второй зоне и четвертой зонах), $R = R_1$, $R = R_2$, $R = R_3$, $R_1 = 0{,}01I_2$, $R_2 = 0{,}05I_2$, $R_3 = 0{,}1I_2$, где I_k – единичная матрица порядка k.

В ходе численного эксперимента рассчитывается истинная динамика концентраций во всех четырёх зонах, формируются зашумлённые измерения датчиков, выполняется оценивание полного состояния фильтром Калмана, вычисляется среднеквадратичная ошибка сравнения истинной и восстановленной концентрации

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{4N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{4}\left(x_i(t_k) - \hat{x}_i(t_k)\right)^2}.$$

Таблица1.Исследование влияния количества датчиков, $R = R_2$

схема мониторинга	изменяемые зоны	σ
1 датчик ($H = H_1$)	2	0.481
2 датчика ($H = H_2$)	2, 4	0.302
3 датчика ($H = H_3$)	1, 2, 4	0.171

Таблица2.Исследование влияния шума измерений, $H = H_2$

Ковариационная матрица шума R	σ
$R = R_1$	0.213
$R = R_2$	0.302
$R = R_3$	0.432