САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

# МАТРИЧНЫЕ ПАДЕ-АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

д.ф.-м. наук, профессор
Соболев В.А.

ассистент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления
Коннова К.А.

г. Самара, 20-21 ноября 2025 г.

Пусть известно разложение функции $f(x)$ в виде степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i . \qquad (1)$$

Аппроксимация Паде представляет собой дробно-рациональную функцию вида:

$$[L/M] = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_l z^l}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}, \qquad (2)$$

разложение которой в ряд Тейлора в нуле совпадает с разложением (1).

В общем случае коэффициенты разложения функции (2) при степенях $1, z, z^2, \dots, z^{L+M}$ должны совпадать с соответствующими коэффициентами ряда (1):

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_l z^l}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m} + O(z^{L+M+1}).$$

ул. Московское шоссе, д.34, г.Самара, 443086, тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36, сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru 

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}x + A_{12}y, \\ \varepsilon\dot{y} &= A_{21}x + A_{22}y, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $x, y \in R^n, A_{ij} = A_{ij}\,(\varepsilon), i, j = 1,2, \varepsilon$ –малый параметр, строится расщепляющее преобразование:

$$\begin{aligned} x &= v + \varepsilon P z, \\ y &= z + Lx, \end{aligned} \qquad (4)$$

где $P = P(\varepsilon), L = L(\varepsilon)$ – неизвестные матричные функции, являющиеся решениями уравнений

$$\varepsilon\dot{L} + \varepsilon L(A_{11} + A_{12}L) = A_{21} + A_{22}L,$$

$$\varepsilon\dot{P} + PA_2 = \varepsilon A_1 P + A_{12},$$

$$A_1 = A_{11} + A_{12}L, \qquad A_2 = A_{22} - \varepsilon L A_{12}.$$

Расщепляющее преобразование (4) приводит систему (3) к блочно-диагональному виду

$$\begin{aligned} \dot{v} &= A_1(\varepsilon)v, \\ \varepsilon\dot{z} &= A_2(\varepsilon)z, \end{aligned} \qquad (5)$$

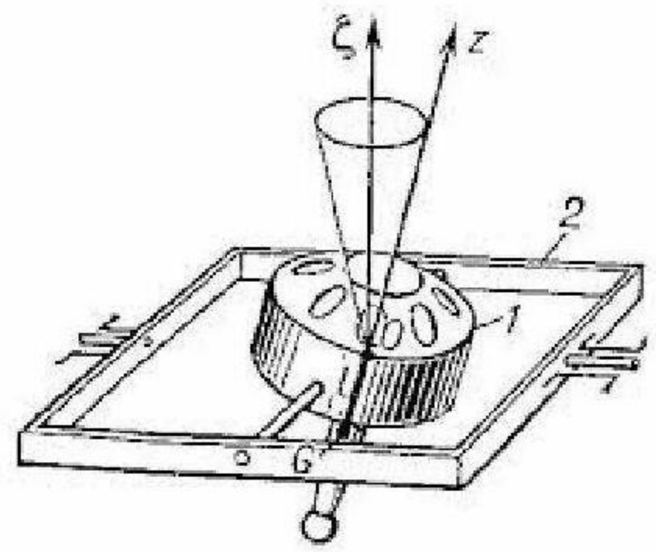
ул. Московское шоссе, д.34, г.Самара, 443086, тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36, сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru

Гироскопические системы представляют собой сложные устройства, отличительной чертой которых является способность одновременно совершать высокочастотные нутационные колебания и низкочастотные прецессионные колебания.

Нутационные колебания — это быстрые изменения ориентации системы, а прецессионные колебания — это медленные изменения направления оси вращения.

При асимптотическом анализе уравнений таких систем требуется получение результатов с высокой степенью точности, что требует проведения большого числа громоздких аналитических вычислений.

Особый интерес в исследование также вызван парадоксом прецессионной теории гироскопов, затрагивающим допустимость применения прецессионных уравнений для исследования гироскопических систем.



Приведем линейную автономную гироскопическую систему к блочно-диагональному виду

$$J\ddot{x} + (HG + D)\dot{x} + Cx = 0, \tag{6}$$

где $x$ – вектор обобщенных координат, $J$ и $D$ – симметрические матрицы, $J$ положительно определенная матрица, $D$ – неотрицательно определенная матрица, $G$ – кососимметрическая невырожденная матрица, $H$ – большой параметр.

Введя обозначения $\dot{x} = y, \varepsilon = \frac{1}{H}$, система (1) представляется в виде сингулярно возмущенной стационарной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y, \\ &\varepsilon J\dot{y} = -(G + \varepsilon D)y - \varepsilon Cx. \end{aligned} \tag{7}$$

*Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. – М.: Наука, 1974. – 300 с.

Для системы дифференциальных уравнений (7) можно построить расщепляющее преобразование, приводящее систему к блочно-диагональному виду

$$x = v + \varepsilon PJz,\quad y = z + \varepsilon Lx, \tag{8}$$

где $L = L(\varepsilon), P = P(\varepsilon)$ – матричные функции, являющиеся решениями уравнений

$$\varepsilon^2 JL^2 = -(G + \varepsilon D)L - C, \tag{9}$$

$$P\big(-(G + \varepsilon D + \varepsilon^2 JL)\big) = \varepsilon^2 PLJ + I. \tag{10}$$

Тогда система (7) примет вид (11):

$$\dot{x} = y,\quad \varepsilon J\dot{y} = -(G + \varepsilon D)y - \varepsilon Cx. \tag{7}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\dot{v} = \varepsilon L(\varepsilon)v,\quad \varepsilon J\dot{z} = -(G + \varepsilon D + \varepsilon^2 JL)z, \tag{11}$$

*Воропаева Н.В.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / Н.В. Воропаева, В.А. Соболев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 256 с.

Неизвестные матричные функции $L = L(\varepsilon)$, $P = P(\varepsilon)$, являющиеся решением уравнений (9)-(10), могут быть найдены в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра:

$$\begin{aligned} L &= L(\varepsilon) = L^{(0)} + \varepsilon L^{(1)} + \varepsilon^2 L^{(2)} + \varepsilon^3 L^{(3)} + \cdots, \\ P &= P(\varepsilon) = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + \varepsilon^3 P^{(3)} + \cdots. \end{aligned} \tag{12}$$

Также в виде аппроксимации Паде [m/n]:

$$\sum_{i=0}^{k} L^{(i)} \varepsilon^i + O\left(\varepsilon^{k+1}\right) \approx A_m(\varepsilon)\, B_n^{-1}(\varepsilon), \qquad \sum_{i=0}^{k} P^{(i)} \varepsilon^i + O\left(\varepsilon^{k+1}\right) \approx M_m(\varepsilon)\, N_n^{-1}(\varepsilon), \tag{13}$$

где $A_m(\varepsilon), M_m(\varepsilon)$ – многочлены степени $m$ с матричными коэффициентами $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$; $M^{(0)}, M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(m)}$, соответственно, а $B_n(\varepsilon), N_n(\varepsilon)$ – многочлены степени $n$, с матричными коэффициентами $I, B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(n)}$; $I, N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n)}$, соответственно, символом $I$ обозначается единичная матрица соответствующего размера.

Уравнения гироскопической вертикали с радиальной коррекцией при отсутствии трения ($A, H, k - const$):

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} - H\dot{\beta} - k\beta &= 0, \\ A\ddot{\beta} + H\dot{\alpha} + k\alpha &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

Введем обозначения

$$\dot{\alpha} = \gamma, \dot{\beta} = \delta, \varepsilon = \frac{1}{H}, x = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix}\gamma \\ \delta\end{pmatrix},$$

тогда система (12) примет вид (2) при

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \varepsilon J\dot{y} &= -(G + \varepsilon D)y - \varepsilon Cx. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &J = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = AI, \\ &G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = 0, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} = kG. \end{aligned} \tag{15}$$

Для системы (15) найдем расщепляющее преобразование

$$\begin{aligned} x &= v + \varepsilon APz, \\ y &= z + \varepsilon Lx. \end{aligned} \tag{16}$$

Матричные функции $L$ и $P$ находятся как решения уравнений

$$\varepsilon^2 A L^2 = -kG - GL, \tag{17}$$

$$-P(G + \varepsilon^2 AL) = I + \varepsilon^2 ALP. \tag{18}$$

Решение уравнений (17)-(18) в виде разложения по степеням малого параметра $\varepsilon$:

$$\begin{gathered} L = L(\varepsilon) = -kI + \varepsilon^2 k^2 AG + \varepsilon^4 2A^2 k^3 + O(\varepsilon^6). \\ P = P(\varepsilon) = G + \varepsilon^2 2kAI - \varepsilon^4 6k^2 A^2 G + O(\varepsilon^6). \end{gathered} \tag{19}$$

Решение уравнений (17)-(18), полученное с помощью аппроксимации Паде [2/2] :

$$\begin{gathered} L = L(\varepsilon) \approx [-kI - \varepsilon^2 k^2 AG](I + \varepsilon^2 2kAG)^{-1} \\ P = P(\varepsilon) \approx (G - \varepsilon^2 AkI)(I + \varepsilon^2 3kAG)^{-1} . \end{gathered} \tag{20}$$

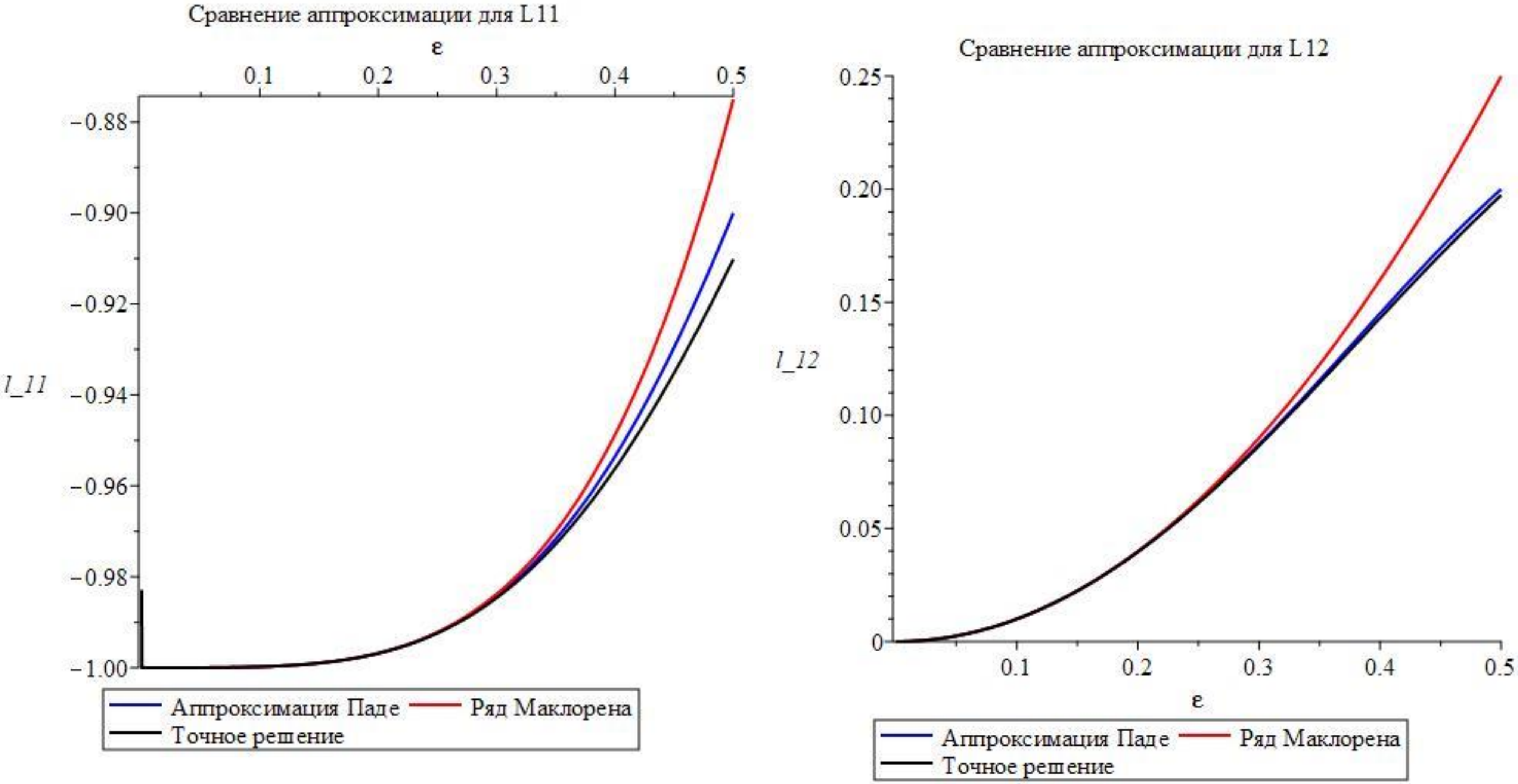



*Рис.1. Сравнение аппроксимаций для элементов матрицы $L(\varepsilon)$*

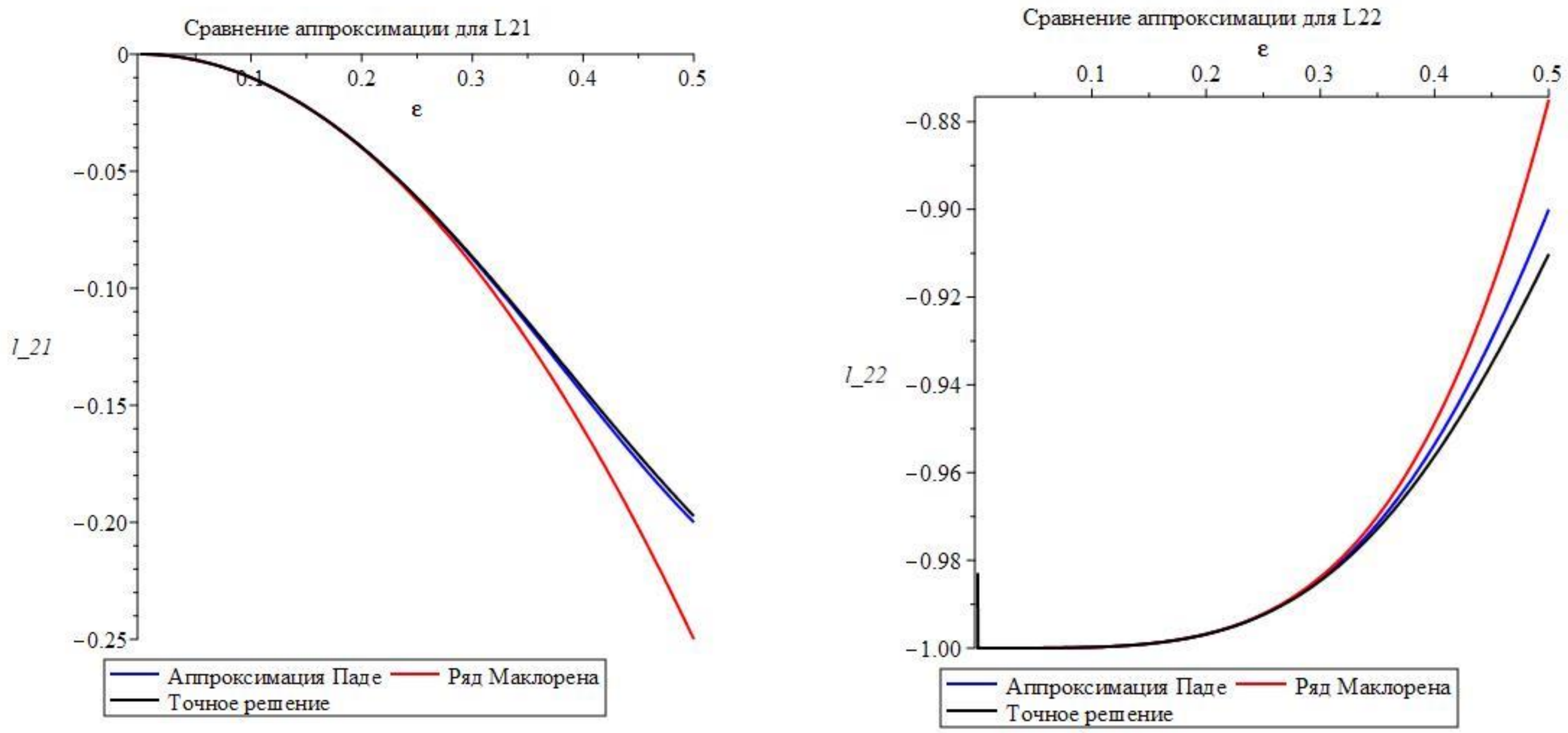



*Рис.2. Сравнение аппроксимаций для элементов матрицы $L(\varepsilon)$*

После нахождения необходимых представлений для расщепляющего преобразования – задача декомпозиции решена. Система (15) при (16) представляется в блочно-диагональном виде:

$$\dot{x} = y,$$
$$\varepsilon J \dot{y} = -(G + \varepsilon D)y - \varepsilon C x.$$

$$J = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = AI,$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = 0, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} = kG.$$

$$\dot{v} = \varepsilon L v,$$
$$\varepsilon \dot{A} z = \left(-\varepsilon A L + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) z. \qquad (21)$$

ул. Московское шоссе, д.34, г.Самара, 443086, тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36, сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru

В системе (21) быстрые и медленные переменные независимы друг от друга. Из вида матрицы $L$ следует асимптотическая устойчивость медленной подсистемы. Матрица быстрой подсистемы может быть представлена в форме, из которой следует неустойчивость быстрой подсистемы:

$$\dot{v} = \varepsilon L v,$$
$$\varepsilon \dot{A} z = \left(-\varepsilon A L + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) z.$$

$$\left(-\varepsilon A L + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 k & 1 \\ -1 & \varepsilon^2 k \end{pmatrix} + O(\varepsilon^4).$$

В то же время при анализе уравнений этой гироскопической системы с помощью уравнений прецессионной теории гироскопов, которые применительно к рассматриваемой системе имеют вид

$$H\dot{\beta} + k\beta = 0,$$
$$H\dot{\alpha} + k\alpha = 0.$$

Последняя система асимптотически устойчива, в отличие от исходной, которая неустойчива.

# РЕШЕНИЕ МЕДЛЕННОЙ ПОДСИСТЕМЫ

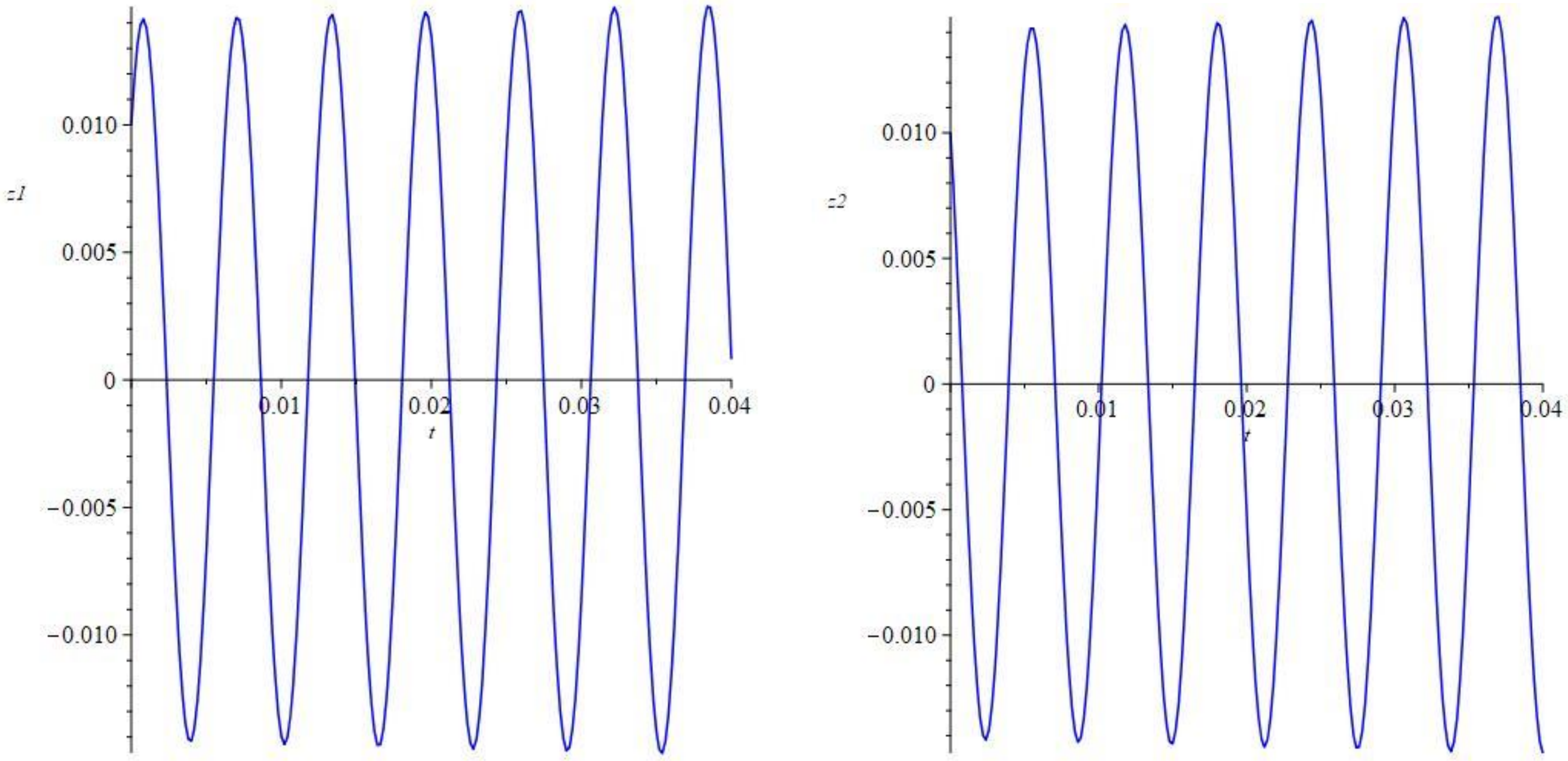



*Рис.3. Графики компонентов решения быстрой подсистемы (21) для аппроксимации Паде [2/2]*

Неустойчивость быстрой подсистемы не зависит от используемого асимптотического представления $L$, если учитываются члены второго порядка по малому параметру, включительно.
Что подтверждается графиками компонентов решения (рисунок 3).

Заметен очень медленный рост амплитуды нутационных колебаний.

ул. Московское шоссе, д.34, г.Самара, 443086, тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36, сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru

САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

# БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ