Пунктуальные и P-вычислимые представления колец и алгебр

Групповые кольца и кольца многочленов

Жавохир Отабекович Рузимов

Новосибирский государственный университет

IV Всероссийская научная конференция
«Математика и математическое моделирование»
Самара, 2026

Предмет исследования

Цель

Исследование примитивно-рекурсивных, пунктуальных и P-вычислимых представлений колец и алгебр.

- Групповые кольца RG и групповые алгебры KG.
- Кольца многочленов $R[x]$.
- Существование эффективных представлений и пунктуальная размерность.

Основные понятия

Примитивно-рекурсивное представление

Носитель $A \subseteq \omega$ примитивно-рекурсивен; операции и отношения конечной сигнатуры примитивно-рекурсивны.

Пунктуальное представление

Носитель равен ω, все основные операции и отношения примитивно-рекурсивны.

P-вычислимое представление

При фиксированном способе кодирования элементов носитель распознаётся, а основные операции и отношения вычисляются за полиномиальное время относительно длины входа.

Определение группового кольца

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, G — абелева группа.

$$RG = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g : \ a_g \in R, \ |\{g : a_g \neq 0\}| < \infty \right\}.$$

$$\sum_g a_g g + \sum_g b_g g = \sum_g (a_g + b_g) g,$$

$$\left(\sum_h a_h h \right) \left(\sum_k b_k k \right) = \sum_g \left(\sum_{hk=g} a_h b_k \right) g.$$

Теорема о примитивно-рекурсивности RG

Теорема (Рузимов; рукопись на рецензировании)

Если коммутативное кольцо с единицей R и абелева группа G имеют примитивно-рекурсивные представления, то RG имеет примитивно-рекурсивное представление.

Идея доказательства

Конечные наборы пар (g_i, a_i) кодируются примитивно-рекурсивной функцией Гёделя β; канонизация устраняет перестановки, а конечные свёртки задают операции кольца.

Пунктуальное представление группового кольца

Предложение (Рузимов; рукопись на рецензировании)

Пусть R имеет примитивно-рекурсивное представление, не является локально конечным, а абелева группа G имеет примитивно-рекурсивное представление. Тогда RG имеет пунктуальное представление.

Идея доказательства

R вкладывается в RG как $R \cdot e_G$, поэтому RG не локально конечно. Применяется результат Алаева о пунктуальной копии нелокально конечной примитивно-рекурсивной структуры.

Вычислимые абелевы группы без кручения

Теорема (Рузимов; рукопись на рецензировании)

Если R — нелокально конечное коммутативное кольцо с единицей, имеющее примитивно-рекурсивное представление, а G — вычислимая абелева группа без кручения, то RG имеет пунктуальное представление.

Следствие

Для любой вычислимой абелевой группы без кручения G групповое кольцо $\mathbb{Z}G$ имеет пунктуальное представление.

Пунктуальные групповые алгебры

Предложение (Рузимов; рукопись на рецензировании)

Пусть поле K имеет пунктуальное представление, а G — вычислимая абелева группа без кручения. Тогда групповая алгебра KG имеет пунктуальное представление.

Следствие

$\mathbb{Q}G$ имеет пунктуальное представление для всякой вычислимой абелевой группы без кручения G.

Пунктуальная размерность

Определение

$\dim_{\text{punct}} \mathfrak{A}$ — число классов пунктуальных копий структуры $\mathfrak{A}$ относительно примитивно-рекурсивных изоморфизмов.

- $\dim_{\text{punct}} \mathfrak{A} = 1$: пунктуальная категоричность.
- $\dim_{\text{punct}} \mathfrak{A} = \infty$: бесконечно много попарно не пунктуально изоморфных копий.

Пунктуальная размерность $\mathbb{Z}G$

Теорема (Рузимов; рукопись на рецензировании)

Пусть $G \neq 0$ — вычислимая абелева группа без кручения. Тогда

$$\boxed{\dim_{\text{punct}} \mathbb{Z}G = \infty.}$$

Идея доказательства

Диагонализация против примитивно-рекурсивных кандидатов на изоморфизмы между пунктуальными копиями; используется вложение $\mathbb{Z}G \subseteq \mathbb{Q}G$.

Граница пунктуальной представимости

Результат (Рузимов; рукопись на рецензировании)

Существуют групповые кольца с примитивно-рекурсивным представлением, но без пунктуального представления.

Смысл результата

Примитивно-рекурсивность операций на некотором примитивно-рекурсивном носителе не обеспечивает существование такого представления на всём ω.

Кольцо многочленов $R[x]$

Определение

$R[x]$ — кольцо формальных конечных сумм

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad a_i \in R, \quad n \geq 0.$$

- Сложение выполняется покоэффициентно.
- Умножение определяется свёрткой коэффициентов:

$$(fg)_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Примитивно-рекурсивное представление $R[x]$

Теорема (Рузимов, опубликованный результат)

Если R — примитивно-рекурсивное коммутативное целостное кольцо с единицей, то $R[x]$ имеет примитивно-рекурсивное представление.

Идея доказательства

Кодирование конечных последовательностей коэффициентов с примитивно-рекурсивными операциями над ними.

Пунктуальное представление $R[x]$

Теорема (Рузимов, опубликованный результат)

Если R — примитивно-рекурсивное коммутативное целостное кольцо с единицей и R не является локально конечным, то $R[x]$ имеет пунктуальное представление.

Идея доказательства

Примитивно-рекурсивное представление $R[x]$ и переход к пунктуальной копии посредством условия нелокальной конечности.

P-вычислимость $R[x]$

Теорема (Рузимов, опубликованный результат)

Пусть R — вычислимое коммутативное целостное кольцо с единицей, имеющее полиномиально вычислимое представление. Тогда $R[x]$ также имеет полиномиально вычислимое представление.

Идея доказательства

Конечное кодирование коэффициентов и полиномиальная сложность операций сложения и свёртки при выбранном кодировании.

Дихотомия пунктуальной размерности $R[x]$

Теорема (Рузимов, опубликованный результат)

Для $R[x]$ над вычислимым коммутативным целостным кольцом с единицей R пунктуальная размерность равна либо 1, либо ∞.

$$\boxed{\dim_{\text{punct}} R[x] \in \{1, \infty\}.}$$

Сопоставление результатов

Свойство	*RG*	$R[x]$
Примитивно-рекурсивное представление	Достаточные условия	Достаточные условия
Пунктуальное представление	Достаточные условия	Достаточные условия
P-вычислимость	Не рассматривается здесь	Теорема
Пунктуальная размерность	$\dim_{\text{punct}} \mathbb{Z}G = \infty$	1 или ∞

Статус: *RG* — рукопись на рецензировании; $R[x]$ — опубликованная работа.

Основные выводы

1. Получены достаточные условия существования примитивно-рекурсивных и пунктуальных представлений групповых колец и алгебр.
2. Для нетривиальной вычислимой абелевой группы без кручения заявлена бесконечная пунктуальная размерность $\mathbb{Z}G$.
3. Для $R[x]$ получены результаты о примитивно-рекурсивности, пунктуальности, P-вычислимости и дихотомии размерности.

Результаты по RG представлены в рукописи «О пунктуальных представлениях групповых колец и групповых алгебр», находящейся на рецензировании в журнале «Известия Иркутского государственного университета. Серия „Математика“».

Публикации и статус результатов

Опубликовано

Ruzimov J. *On punctual and polynomial-time computable presentations of the polynomial ring*. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 2026, 131(3).
`https://doi.org/10.26577/JMMCS131320265`

На рецензировании

Ruzimov J. O. «О пунктуальных представлениях групповых колец и групповых алгебр». Рукопись подана в журнал «Известия Иркутского государственного университета. Серия „Математика“».

Спасибо за внимание!

IV Всероссийская научная конференция
«Математика и математическое моделирование»
Самара, 2026