Задача оптимального быстродействия для трехтемповой системы

О.В. Видилина, С.И. Видилина

Рассматривается задача оптимального быстродействия для системы с несколькими малыми параметрами при производных. Найдена асимптотика точек переключения оптимального управления и минимального времени перехода системы из заданного начального положения в начало координат. Для этого используется метод разделения движений, с помощью которого происходит декомпозиция исходной системы на подсистемы меньшей размерности.

Рассмотрим задачу оптимального быстродействия для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1u, \\ \varepsilon\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2u, \\ \varepsilon\mu\dot{z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3u, \end{cases} \tag{1}$$

где $x = x(t), y = y(t), z = z(t) \in R$, $a_{ij} = a_{ij}(\varepsilon, \mu)$, $b_i = b_i(\varepsilon, \mu)$ $(i, j = 1, 2, 3)$, $u = \pm 1$ оптимальное управление, переводящее систему из начального положения (x_0, y_0, z_0) в момент времени t_0 за минимальное время T в начало координат, ε, μ – малые положительные параметры. Предполагаем, что все собственные значения матрицы системы вещественны, различны и отрицательны. Наша задача: получить асимптотическое разложение по степеням малых параметров точек переключения оптимального управления и минимального времени перехода.

Произведем декомпозицию системы (1). Сделаем это в два этапа [1]. На первом этапе при помощи замены переменных

$$x = \omega_0 + \varepsilon\mu H_1(t,\ \varepsilon,\ \mu)w, \qquad y = v_0 + \mu H_2(t,\ \varepsilon,\ \mu)w,$$

$$z = w + L_1(t,\ \varepsilon,\ \mu)x + L_2(t,\ \varepsilon,\ \mu)y$$

система (1) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{\omega}_0 = (a_{11} + a_{13}L_1)\,\omega_0 + (a_{12} + a_{13}L_2)\,v_0 + (b_1 - H_1B_3)\,u, \\ \varepsilon\dot{v}_0 = (a_{21} + a_{23}L_1)\,\omega_0 + (a_{22} + a_{23}L_2)\,v_0 + (b_2 - H_2B_3)\,u, \\ \varepsilon\mu\dot{w} = (-\varepsilon\mu L_1a_{13} - \mu L_2a_{23} + a_{33})\,w + (b_3 - \varepsilon\mu L_1b_1 - \mu L_2b_2)\,u, \end{cases} \tag{2}$$

где функции L_i, H_i, $(i = 1, 2)$ могут быть найдены в виде асимптотического разложения по степеням малых параметров из уравнений

$$\varepsilon\mu L_1\,(a_{1i} + a_{13}L_i) + \mu L_2\,(a_{2i} + a_{23}L_i) = a_{3i} + a_{33}L_i,$$

$$H_i\,(-\varepsilon\mu L_1a_{13} - \mu L_2a_{23} + a_{33}) = \varepsilon\mu\,(a_{i1} + a_{i3}L_1)\,H_1 + \mu\,(a_{i2} + a_{i3}L_2)\,H_2 + a_{i3}.$$

Теперь перейдем ко втором этапу расщепления системы (1). При помощи замены переменных

$$\omega_0 = \omega + \varepsilon H(\varepsilon,\ \mu)v, \quad v_0 = v + L(\varepsilon,\ \mu)\omega_0$$

система (2) приведется к виду

$$\begin{cases} \dot{\omega} = D_1\omega + \overline{B_1}u, \\ \varepsilon\dot{v} = D_2v + \overline{B_2}u, \\ \varepsilon\mu\dot{w} = D_3w + \overline{B_3}u, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$D_1 = (a_{11} + a_{13}L_1) + (a_{12} + a_{13}L_2)L, \quad D_2 = (a_{22} + a_{23}L_2) - \varepsilon L(a_{12} + a_{13}L_2),$$

$$D_3 = a_{33} - \varepsilon\mu L_1a_{13} - \mu L_2a_{23}, \quad \overline{B_1} = b_1 - H_1\overline{B_3} - H\overline{B_2},$$

$$\overline{B_2} = b_2 - H_2\overline{B_3} - \varepsilon L(b_1 - H_1\overline{B_3}), \quad \overline{B_3} = b_3 - \varepsilon\mu L_1b_1 - \mu L_2b_2$$

и функции $L = L(\varepsilon, \mu)$, $H = H(\varepsilon, \mu)$ определяются в виде асимптотических разложений по степеням малых параметров из уравнений

$$\varepsilon LD_1 = (a_{21} + a_{23}L_1) + (a_{22} + a_{23}L_2)\,L, \quad HD_2 = \varepsilon D_1H + a_{12} + a_{13}L_2.$$

Таким образом, с помощью двойной замены переменных систему (1) привели к диагональному виду (3).

Далее построено асимптотическое разложение по степеням малых параметров для моментов переключения оптимального управления и минимального времени перехода системы из начального положения (ω_0, v_0, w_0) в начальный момент t_0 в начало координат за минимальное время T [2].

Рассмотрен в качестве примера случай $\mu = \varepsilon$. Считая, что $T - t_1 = \varepsilon\delta_2$, $T - t_2 = \varepsilon^2\delta_3$, $T = t_{10} + \varepsilon\delta_1$, где $\delta_i = \delta_i(\varepsilon) = \delta_{i0} + \varepsilon\delta_{i1} + \varepsilon^2\delta_{i2} + \cdots$, для моментов переключения и оптимального времени допустимы следующее асимптотическое разложение по степеням малых параметров:

$$t_1 = t_{10} + \varepsilon\,(\delta_1 - \delta_2)\,, \quad t_2 = t_{10} + \varepsilon\delta_1 - e^2\delta_3, \quad T = t_{10} + \varepsilon\delta_1,$$

где

$$\delta_3 = \frac{\ln 2}{\alpha_{30}} - \varepsilon\frac{\alpha_{31}\ln 2}{\alpha_{30}^2} + \cdots, \qquad \delta_2 = \frac{\ln 2}{\alpha_{20}} - \varepsilon\frac{\ln 2}{\alpha_{20}}\left(\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{20}} + \frac{2\alpha_{20}}{\alpha_{30}}\right) + \cdots,$$

$$T = \frac{\ln(-2A_{10})}{\alpha_{10}} - \varepsilon\frac{1}{A_{10}\alpha_{10}}\left(A_{11} + 2\alpha_{10}\delta_{20}A_{10} + \frac{\alpha_{11}A_{10}\ln(-2A_{10})}{\alpha_{10}}\right) - \cdots.$$

САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Московское шоссе, 34, Самара, 443086
+7 (846) 335-18-26, +7 (846) 335-18-36 (факс)
ssau@ssau.ru, www.ssau.ru