Аналог теоремы Йона для функций из ядра преобразования Помпейю, связанных с семейством из треугольника и квадрата

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
IV Всероссийская научная конференция «Математика и математическое моделирование»

Выполнила: Власенко И. С.
Аспирант 1 курса обучения
Научный руководитель: Волчков Валерий Владимирович

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»

Самара, 29–30 октября 2026 г.

Актуальность и цель доклада

Актуальность

Локальная единственность в проблеме Помпейю позволяет установить связь между геометрией семейства множеств и структурой ядра преобразования Помпейю.

Цель доклада

Представить локальный аналог теоремы Ф. Йона для функций из ядра преобразования Помпейю, соответствующего семейству

$$\mathcal{A} = \{T, K\},$$

где T — равнобедренный треугольник, K — специально нормированный квадрат.

Преобразование Помпейю и постановка задачи

Определение

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{U}} f = (f_1, \ldots, f_s), \qquad f_i(g) = \int_{gA_i} f(x)\, dx,$$

где $g \in \mathbf{M}(n)$, $gA_i \subset \mathcal{U}$.

$$\mathrm{Ker}\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{U}} = \{f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}) : \mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{U}} f = 0\}.$$

Локальный вопрос

Пусть

$$f \in \mathrm{Ker}\mathcal{P}_{\mathcal{A},B_R}, \qquad f = 0 \text{ в } B_r.$$

При каких условиях следует

$$f = 0 \text{ в } B_R?$$

Геометрия рассматриваемого семейства

Треугольник

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{12}, \qquad T = \{(x, y) : 0 \le x \le \cos\alpha_0,\ -x\,\mathrm{tg}\,\alpha_0 \le y \le x\,\mathrm{tg}\,\alpha_0\}\,.$$

$$2\alpha_0 = \frac{\pi}{6}, \qquad r^*(T) = \frac{1}{2\cos\alpha_0}.$$

Квадрат

$$K = \frac{\sqrt{30}}{10}K_1, \qquad K_1 = \{(x, y) : -1/2 \le x, y \le 1/2\}.$$

$$d_K = \frac{\sqrt{15}}{5}, \qquad r^*(K) = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

Основной результат

Теорема

Пусть

$$R \in \left(\frac{\sqrt{15}}{10}, \frac{\sqrt{15}}{5} \right), \qquad f \in \mathrm{Ker}\mathcal{P}_{\mathcal{A},B_R}, \quad \mathcal{A} = \{T, K\}.$$

Если

$$f = 0 \text{ в } B_r, \qquad r > \frac{\sqrt{15}}{5} - R,$$

то

$$f = 0 \text{ в } B_R.$$

Ключевая идея доказательства

1. Сглаживание позволяет рассматривать $f \in C^\infty(B_R)$.
2. Усреднение по вращениям сводит задачу к радиальному случаю.
3. Для выбранного семейства существует ненулевой многочлен q такой, что

$$q(\Delta)f = 0 \quad \text{в кольце} \quad \frac{\sqrt{15}}{5} - R < |x| < R.$$

4. Эллиптичность оператора $q(\Delta)$ влечет вещественную аналитичность функции в указанном кольце.

Механизм распространения нуля

Обозначим

$$\rho_R = \frac{\sqrt{15}}{5} - R.$$

Тогда условие теоремы имеет вид

$$r > \rho_R.$$

Следствие

Слой

$$\rho_R < |x| < r$$

является непустым и открытым, причем на нем $f = 0$.

Поскольку f аналитична в кольце

$$\rho_R < |x| < R,$$

по теореме единственности для вещественно аналитических функций получаем

$$f = 0 \quad \text{в } B_R.$$

Заключение

Основной вывод

Получен локальный аналог теоремы Ф. Йона для функций из ядра преобразования Помпейю, связанного с семейством из равнобедренного треугольника и квадрата.

Итоговая формула

$$r > \frac{\sqrt{15}}{5} - R.$$

Данный порог локальной единственности определяется геометрией выбранного семейства.